

4. Regla de L'Hôpital – Integrales impropias

4.1 Presentación de Tema a tratar

Esta guía aborda dos herramientas que permiten extender el cálculo diferencial e integral más allá de sus límites de aplicación directa. Por un lado, la regla de L'Hôpital ofrece un método sistemático para resolver límites que, al evaluarse directamente, conducen a formas indeterminadas como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, situaciones frecuentes al estudiar el comportamiento de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas. Por otro lado, las integrales impropias extienden la noción de integral definida a intervalos no acotados o a funciones con discontinuidades dentro del intervalo de integración, reescribiendo dichas integrales en términos de límites para determinar su convergencia o divergencia. Ambos temas comparten el uso del concepto de límite como herramienta de análisis y resultan fundamentales para cursos posteriores de ecuaciones diferenciales, probabilidad y series.

4.2 Objetivo general

Aplicar la regla de L'Hôpital para resolver límites indeterminados y evaluar integrales impropias mediante su reescritura en términos de límites, determinando su convergencia o divergencia.

4.3 Resultado de aprendizaje

- Resolver límites indeterminados aplicando la regla de L'Hôpital bajo las condiciones matemáticas requeridas.
- Determinar la convergencia o divergencia de integrales impropias reescribiéndolas en términos de límites.

4.4 Explicación teórico / conceptual

4.4.1 Formas indeterminadas

Al calcular el límite de un cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando x tiende a un valor a (o al infinito), puede ocurrir que tanto el numerador como el denominador tiendan a cero, o que ambos tiendan a infinito. En estos casos la sustitución directa no proporciona información sobre el valor del límite, y se dice que se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Stewart (2018) señala que existen otras formas indeterminadas derivadas de estas, tales como $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ y ∞^0 , las cuales pueden reescribirse algebraicamente hasta obtener un cociente en forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

4.4.2 Condiciones y enunciado de la regla de L'Hôpital

Thomas (2015) enuncia la regla de la siguiente manera: sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en un intervalo abierto que contiene a a (excepto posiblemente en a), con $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $x \rightarrow a$ produce una forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista (o sea infinito). Es indispensable verificar previamente que el límite corresponda a una forma indeterminada de las señaladas, pues aplicar la regla sin dicha verificación conduce a resultados incorrectos. Si tras derivar se obtiene nuevamente una forma indeterminada, la regla puede aplicarse de manera sucesiva.

4.4.3 Reescritura de formas indeterminadas mixtas

Larson y Edwards (2010) explican que las formas $0 \cdot \infty$ se reescriben como un cociente llevando uno de los factores al denominador en forma recíproca; las formas $\infty - \infty$ se combinan algebraicamente (por ejemplo, mediante una fracción común) hasta obtener $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$; y las formas exponenciales indeterminadas (0^0 , 1^∞ , ∞^0) se resuelven aplicando logaritmo natural a la expresión, convirtiendo el problema en un límite de la forma $0 \cdot \infty$, que luego se reescribe como cociente.

4.4.4 Integrales impropias de tipo 1: intervalos infinitos

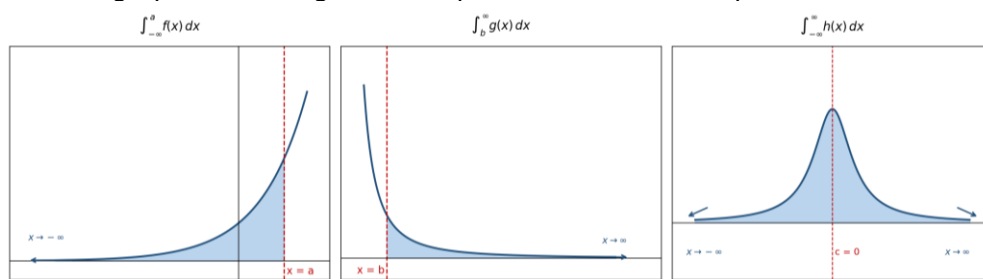
Cuando el intervalo de integración no está acotado, la integral se define como el límite de una integral definida cuando el extremo de integración tiende a infinito. Stewart (2018) presenta esta definición como:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

De manera análoga se definen $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, esta última separando el intervalo en dos integrales impropias independientes evaluadas en un punto de referencia c . Si el límite existe y es finito, se dice que la integral converge a ese valor; si el límite no existe o es infinito, la integral diverge.

Figura 11.

Representación gráfica de la integral de una función en intervalos infinitos.



4.4.5 Integrales impropias de tipo 2: discontinuidades en el intervalo

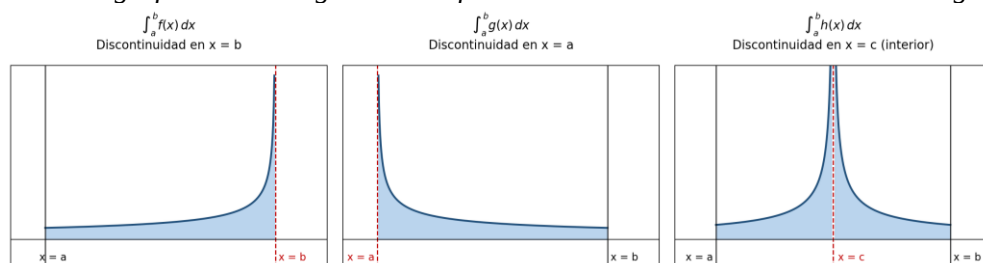
Cuando la función presenta una discontinuidad infinita en un punto c del intervalo $[a, b]$ (incluyendo los extremos), la integral impropia se reescribe como el límite de una integral definida cuando el extremo de integración se aproxima a c . Thomas (2015) indica que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y presenta una discontinuidad infinita en b , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Un procedimiento análogo se aplica cuando la discontinuidad ocurre en el extremo izquierdo o en un punto interior del intervalo, caso en el cual la integral se separa en dos integrales impropias evaluadas en dicho punto.

Figura 12.

Representación gráfica de la integral de una función discontinua en el intervalo de integración.



4.4.6 Convergencia, divergencia y el papel de L'Hôpital

Larson y Edwards (2010) resaltan que, al evaluar el límite que define una integral impropia, con frecuencia se obtienen formas indeterminadas del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $0 \cdot \infty$, particularmente cuando el integrando involucra funciones exponenciales, logarítmicas o racionales. En tales casos, la regla de L'Hôpital se convierte en una herramienta complementaria indispensable para resolver el límite resultante y así concluir, con rigor, si la integral impropia converge o diverge.

4.5 Ejercicio dirigido (andamiaje)

a. Regla de L'Hôpital .

1. Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)}{3x - 5}$$

Paso 1. Identificamos la forma indeterminada: al sustituir $x \rightarrow \infty$, numerador y denominador tienden a ∞ , forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Paso 2. Derivamos numerador y denominador: la derivada de $2x + 1$ es 2; la de $3x - 5$ es 3. El límite se transforma en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$.

Paso 3. Evaluamos: como $\frac{2}{3}$ es constante, el límite es $\frac{2}{3}$.

Conclusión:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x - 5} = \frac{2}{3}.$$

2. Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Paso 1. Identificamos la forma indeterminada: al sustituir $x = 0$, tenemos que $\cos(0) = 1$ y $\frac{1}{0^2} \rightarrow \infty$, por lo que se obtiene 1^∞ .

Paso 2. Como no es un cociente $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, reescribimos con logaritmo. Sea $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, tomando el logaritmo natural a ambos lados de esta expresión y usando las propiedades conocidas de los logaritmos, tenemos $\ln y = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$, y sustituyendo $x = 0$ se obtiene la forma $\frac{0}{0}$.

Paso 3. Derivamos numerador y denominador: la derivada de numerador $\ln(\cos x)$ es $-\tan x$; la del denominador x^2 es $2x$. Y toman el límite del cociente de estas derivadas: $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\tan x}{2x}$, nuevamente $\frac{0}{0}$.

Paso 4. Aplicamos L'Hôpital otra vez: la derivada de $-\tan x$ es $-\sec^2 x$; la de $2x$ es 2. Tomando el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = \frac{-1}{2}$$

Paso 5. Como $\ln y \rightarrow -\frac{1}{2}$, deshacemos el logaritmo: $y \rightarrow e^{-\frac{1}{2}}$.

Conclusión

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

b. Integrales impropias de tipo 1.

1. Determinemos si converge la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Paso 1. Reescribimos la integral como límite (tipo 1, intervalo infinito):

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Paso 2. Calculamos la antiderivada por partes: $u = \ln x$, $dv = x^{-2} dx$ entonces $du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$, $v = -\frac{1}{x}$. Entonces

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

Paso 3. Evaluamos entre 1 y t , obteniendo $-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1$.

Paso 4. Escribimos el límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1 \right]$$

El término $\frac{\ln t}{t}$ es forma $\frac{\infty}{\infty}$, así que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 0$, esto último por la regla de L'Hôpital. El término $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$.

Paso 5. Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1 \right] = -0 - 0 + 1 = 1$$

Conclusión: la integral converge y su valor es 1.

2. Determinemos si converge la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Paso 1. Identificamos la forma indeterminada: ambos extremos son infinitos, por lo que separamos la integral en un punto de referencia, $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Paso 2. Reescribimos cada una como límite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx$$

Paso 3. Calculamos la antiderivada: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$.

Paso 4. Evaluamos cada límite de integración: $\lim_{s \rightarrow -\infty} [\arctan(0) - \arctan(s)] = 0 - (-\pi/2) = \pi/2$. $\lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan(t) - \arctan(0)] = \pi/2 - 0 = \pi/2$.

Paso 5. Sumamos ambos resultados: $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

Conclusión: la integral converge y su valor es π .

c. Integrales impropias de tipo 2.

1. Determinemos si converge la integral impropia

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$$

Paso 1. Identificamos la discontinuidad: en $x = 4$ el denominador se anula, por lo que la función tiene una discontinuidad infinita en el extremo derecho del intervalo.

Paso 2. Reescribimos la integral como límite:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx.$$

Paso 3. Calculamos la antiderivada:

$$\int (4-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

Paso 4. Evaluamos entre 0 y t obteniendo $-2\sqrt{4-t} - (-2\sqrt{4}) = -2\sqrt{4-t} + 4$.

Paso 5. Tomamos el límite:

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} [-2\sqrt{4-t} + 4] = -2(0) + 4 = 4.$$

Conclusión: la integral converge y su valor es 4.

2. Determinemos si converge la integral impropia

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

Paso 1. Identificamos la discontinuidad: en $x = 1$, punto interior del intervalo $[0,2]$, el denominador se anula, por lo que hay una discontinuidad infinita dentro del intervalo.

Paso 2. Como la discontinuidad es interior, separamos la integral en ese punto:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx..$$

Paso 3. Reescribimos la primera como límite:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

Paso 4. Calculamos la antiderivada:

$$\int (x-1)^{-2} dx = -\frac{1}{x-1} + C$$

Evaluada entre 0 y t tenemos $-\frac{1}{t-1} - (-\frac{1}{0-1}) = -\frac{1}{t-1} - 1$.

Paso 5. Tomamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{t-1} - 1 \right] = -\infty$$

Conclusión: como la primera parte ya diverge, la integral completa diverge (sin necesidad de evaluar la segunda parte).

4.6 Ejercicio autónomos para el estudiante

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x}{5x^2 - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$
5. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$
6. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

7. $\int_{-\infty}^0 e^x dx$
8. $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$
9. $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$
10. $\int_0^3 \frac{1}{3-x} dx$
11. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$
12. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

4.7 Respuestas de los ejercicios

1. 1/2
2. 3/5
3. 2
4. 1
5. Converge, valor 1/2
6. Diverge
7. Converge, valor 1
8. Converge, valor 1
9. Converge, valor 3
10. Diverge
11. Diverge
12. Converge, valor 2

REFERENCIAS:

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1: de una variable* (9.ª ed.). McGraw-Hill.

Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (8.ª ed.). Cengage Learning.

Thomas, G. B. (2015). *Cálculo: una variable* (13.ª ed.). Pearson Educación.