

3. Sólidos de revolución

3.1 Presentación de Tema a tratar

Los sólidos de revolución permiten al estudiante trasladar el cálculo de áreas bajo una curva — trabajado en unidades previas— hacia el cálculo de volúmenes de figuras tridimensionales generadas al girar una región plana alrededor de un eje; esta guía acompaña al estudiante en el planteamiento y la resolución de estos volúmenes mediante los métodos de discos, arandelas y capas cilíndricas, y en la argumentación del criterio empleado para seleccionar cada método según la geometría del problema. El principal obstáculo que enfrenta el estudiante en esta temática no es de tipo algebraico, sino de abstracción espacial: visualizar mentalmente el sólido tridimensional que resulta de rotar una región plana. Por ello, la guía enfatiza la conexión entre la representación gráfica de la región, la sección transversal del sólido (disco, arandela o cascarón cilíndrico) y la integral que la modela, con el propósito de reducir el rezago académico característico de las asignaturas de modelado matemático.

3.2 Objetivo general

Calcular el volumen de sólidos de revolución mediante los métodos de discos, arandelas y capas cilíndricas, seleccionando y argumentando el procedimiento de integración pertinente según las condiciones geométricas y algebraicas del problema.

3.3 Resultado de aprendizaje

- Calcular el volumen de sólidos de revolución empleando los métodos de discos y arandelas, superando las barreras de abstracción espacial que suelen inducir al rezago en asignaturas de modelado.
- Aplicar el método de capas cilíndricas para calcular volúmenes cuando las condiciones algebraicas lo requieran.
- Argumentar la selección del método de integración y la interpretación geométrica de los resultados obtenidos, fortaleciendo habilidades comunicativas de carácter transversal que favorecen la integración y el éxito académico del estudiante.

3.4 Explicación teórico /conceptual

3.4.1 Concepto de sólido de revolución

Un sólido de revolución se genera al girar una región plana, limitada por una o varias curvas, alrededor de una recta fija llamada eje de revolución. Stewart (2018) señala que, así como las sumas de Riemann aproximan un área mediante rectángulos, el volumen de un sólido de revolución puede aproximarse dividiendo el sólido en rebanadas delgadas como discos, arandelas o cascarones, cuyo volumen individual se conoce con exactitud, y sumando dichas rebanadas mediante una integral definida.

3.4.2 Método de discos.

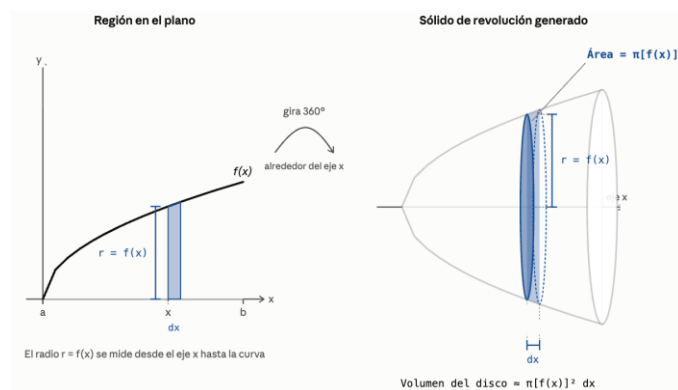
Cuando la región limitada por $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$ gira alrededor del eje x , cada sección transversal perpendicular al eje de giro es un disco circular de radio $r(x) = f(x)$. Larson y Edwards (2010) indican que el área de dicho disco es $\pi[f(x)]^2$, por lo que el volumen del sólido se obtiene integrando esa área a lo largo del intervalo:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Este método se aplica cuando la región gira alrededor de un eje que coincide con uno de sus bordes, de modo que el disco resultante no tiene hueco central.

Figura 3.

Representación gráfica del método de discos.



3.4.3 Método de arandelas.

Cuando la región gira alrededor de un eje sin tocarlo; es decir, cuando queda un espacio vacío entre la región y el eje de giro, cada sección transversal es una arandela (un disco con un hueco circular). Si $f(x)$ es la curva más alejada del eje de giro; denominada radio exterior $R(x)$, y $g(x)$ es la curva más cercana al eje de giro; denominada radio menor $r(x)$, en el intervalo $[a, b]$, con $f(x) \geq g(x)$, Thomas (2015) define el volumen como la diferencia entre el disco exterior y el disco interior:

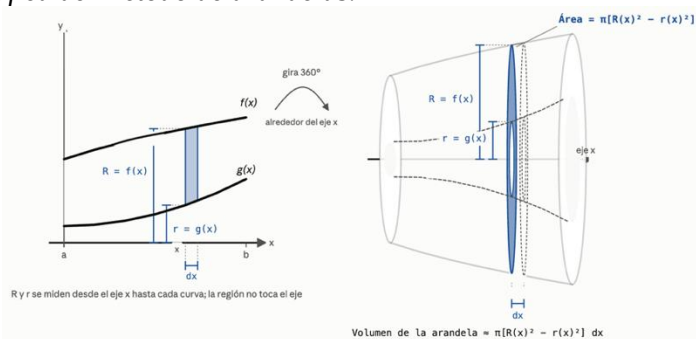
$$V = \pi \int_a^b [R(x)^2 - r(x)^2] dx$$

con $R(x) = f(x)$, $r(x) = g(x)$, entre $x = a$ y $x = b$.

El método de arandelas es, en esencia, una generalización del método de discos: cuando $r(x) = 0$, la arandela se reduce a un disco.

Figura 4.

Representación gráfica del método de arandelas.



3.4.4 Método de capas cilíndricas.

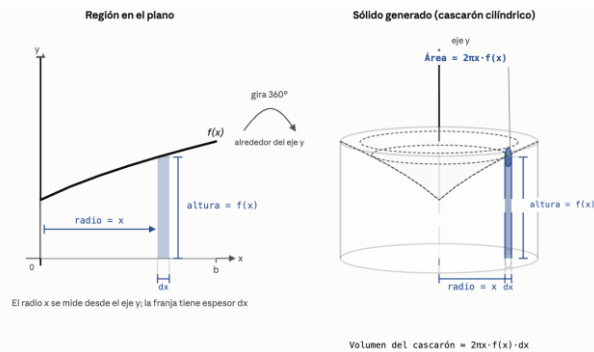
En algunos problemas, despejar x en función de y (o viceversa) para aplicar discos o arandelas resulta algebraicamente complejo o imposible de expresar con funciones elementales. Stewart (2018) propone en estos casos el método de capas (o cascarones) cilíndricas, que conserva la variable de integración original y construye el sólido mediante cascarones cilíndricos concéntricos de radio x , altura $f(x)$ y espesor dx . El volumen de cada cascarón equivale aproximadamente al área de un rectángulo de base $2\pi x$ (la circunferencia del cascarón) por altura $f(x)$, de donde:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Este método resulta especialmente útil cuando el eje de revolución es vertical (eje y) y la función está naturalmente expresada como $y = f(x)$.

Figura 5.

Representación gráfica del método de capas cilíndricas.



3.4.5 Criterio de selección del método

La elección entre discos, arandelas o capas cilíndricas depende de dos factores: la posición del eje de revolución respecto a la región (si el eje toca o no el borde de la región) y la facilidad algebraica para expresar la curva en función de la variable de integración. Larson y Edwards (2010) recomiendan iniciar todo problema con un bosquejo de la región y del sólido generado, pues dicha representación gráfica permite anticipar si la sección transversal será un disco, una arandela o un cascarón, y evita errores en el planteamiento de la integral. Interpretar el resultado obtenido (expresado siempre en unidades cúbicas) como el volumen físico del sólido descrito por la rotación es tan importante como el cálculo mismo, ya que permite verificar la coherencia del resultado frente a la magnitud esperada de la figura.

3.5 Ejercicio dirigido (andamiaje)

a. Método de discos.

1. Calculemos el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje x , la región limitada por $f(x) = \sqrt{x}$, el eje x , entre $x = 0$ y $x = 4$.

Paso 1. El radio del disco es $r(x) = f(x) = \sqrt{x}$.

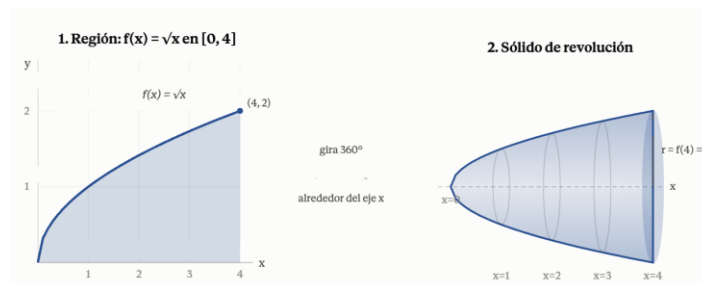
Paso 2. Planteamos la integral:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

Paso 3. Resolvemos: $V = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{16}{2} \right) = 8\pi \approx 25.13 u^3$

Figura 6.

Sólido de revolución al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por $f(x) = \sqrt{x}$, el eje x , entre $x = 0$ y $x = 4$.

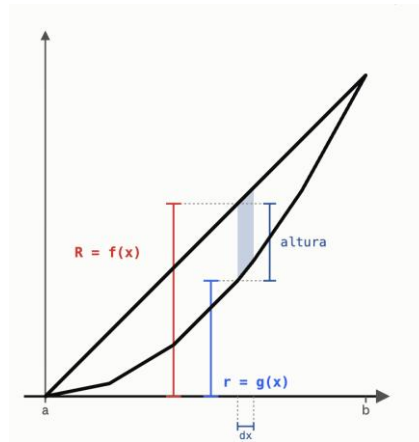


b. Método de arandelas.

1. Calculemos el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje x , la región entre $f(x) = x$ (curva exterior) y $g(x) = x^2$ (curva interior), en el intervalo $[0, 1]$, donde $f(x) \geq g(x)$.

Figura 7.

Región acotada por las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ que rota alrededor del eje x .



Paso 1. Identificamos $R(x) = x$ y $r(x) = x^2$.

Paso 2. Planteamos la integral:

$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - x^4] dx$$

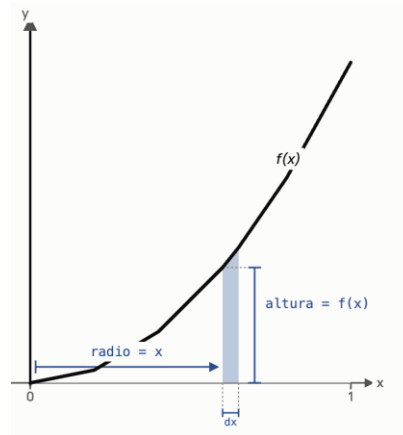
Paso 3. Resolvemos: $V = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15} \approx 0.42 u^3$.

c. Método de capas cilíndricas.

1. Calculemos el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje y , la región bajo $f(x) = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 1$.

Figura 8.

Región acotada por las funciones $f(x) = x^2$ que rota alrededor del eje y .



Paso 1. Como el eje de giro es vertical y despejar x en función de y complicaría el planteamiento, usamos capas cilíndricas con radio x y altura $f(x) = x^2$.

Paso 2. Planteamos la integral:

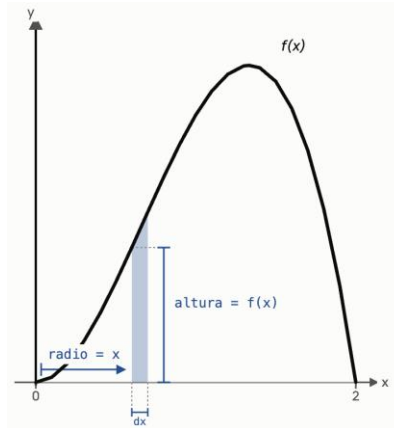
$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx$$

Paso 3. Resolvemos: $V = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 u^3$.

2. Región limitada por $f(x) = 2x^2 - x^3$ y el eje x , en el intervalo $[0, 2]$, girada alrededor del eje y .

Figura 9.

Región acotada por las funciones $f(x) = 2x^2 - x^3$ y el eje x que rota alrededor del eje y .



Parte A. Solución por capas cilíndricas

Paso 1. Identificamos que el eje de giro es vertical (eje y) y que la función está expresada de forma natural como $y = f(x)$, así que conviene integrar en x usando capas: $radio = x$, $altura = f(x) = 2x^2 - x^3$.

Paso 2. Planteamos la integral:

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)dx = \dots$$

Paso 3. Resolvemos:

$$V = 2\pi \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = 2\pi \left[\left(\frac{16}{2} \right) - \left(\frac{32}{5} \right) \right] = 2\pi(8 - 6.4) = 2\pi(1.6) = \frac{16\pi}{5} \approx 10.05 u^3$$

Tres pasos y una integral polinómica sencilla: el método es completamente directo porque la variable de integración (x) coincide con la variable en la que f está definida.

Parte B. Intento de solución por arandelas

Paso 1. Para usar arandelas alrededor del eje y necesitamos integrar respecto a y , lo que exige despejar x en función de y a partir de $y = 2x^2 - x^3$, es decir, resolver la ecuación cúbica:

$$x^3 - 2x^2 + y = 0$$

Paso 2. Antes de intentar resolverla, analizamos si $f(x) = 2x^2 - x^3$ es invertible en $[0, 2]$. Calculamos $f'(x) = 4x - 3x^2 = x(4 - 3x)$, que se anula en $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$. Como $f''(x) = 4 - 6x$, en $x = \frac{4}{3}$ se tiene $f''\left(\frac{4}{3}\right) = -4 < 0$, así que es un máximo: $f\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{9}\right) - \frac{64}{27} = \frac{32}{27} \approx 1.185$. Además $f(0) = 0$ y $f(2) = 0$.

Paso 3. Esto significa que f crece de 0 a $\frac{32}{27}$ en $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ y luego decrece de $\frac{32}{27}$ a 0 en $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$: f **no es monótona**, por lo tanto no es invertible en todo el intervalo. Para cada altura y entre 0 y $\frac{32}{27}$, la ecuación $x^3 - 2x^2 + y = 0$ tiene dos raíces reales en $[0, 2]$ (una rama ascendente $x_1(y) \in [0, 4/3]$ y una rama descendente $x_2(y) \in [4/3, 2]$) que corresponderían al radio interior y exterior de la arandela:

$$V = \pi \int_0^{\frac{32}{27}} [x_2(y)^2 - x_1(y)^2] dy$$

Paso 4. El obstáculo es que $x_1(y)$ y $x_2(y)$ no tienen una forma algebraica simple: hay que resolver la cúbica $x^3 - 2x^2 + y = 0$ (por ejemplo con la fórmula de Cardano, previa sustitución $x = t + 2/3$ para eliminar el término cuadrático), identificar cuál raíz corresponde a cada rama, y luego integrar esas expresiones respecto a y . Es matemáticamente posible pero, a diferencia de las capas cilíndricas, no es resoluble a mano en un tiempo razonable.

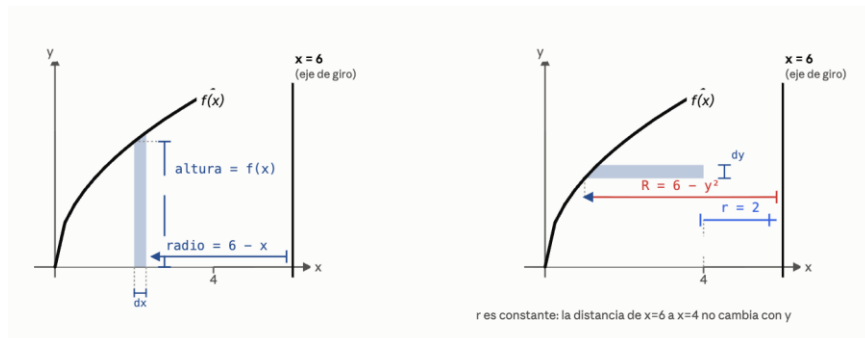
Conclusión

Ambos métodos son válidos en teoría (describen el mismo sólido), pero aquí la elección no es cuestión de gusto: la no monotonía de $f(x)$ hace que arandelas requiera resolver una cúbica y partir la integral en ramas, mientras que capas cilíndricas resuelve el mismo volumen en tres líneas. El resultado exacto es $V = \frac{16\pi}{5} \approx 10.05 u^3$, obtenido únicamente por capas.

3. Región bajo $f(x) = \sqrt{x}$, entre $x = 0$ y $x = 4$, girada alrededor de la recta $x = 6$

Figura 10.

Región acotada por la función $f(x)$ y el eje x que rota alrededor cualquier eje vertical.



Solución por capas cilíndricas

Paso 1. Como el eje de giro es la recta $x = 6$ y la región está a su izquierda (x de 0 a 4), el radio de cada capa ya no es x , sino la distancia hasta el eje: $radio = 6 - x$. La altura sigue siendo $f(x) = \sqrt{x}$.

Paso 2. Planteamos la integral:

$$V = 2\pi \int_0^4 (6 - x)\sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 \left(6x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

Paso 3. Resolvemos:

$$V = 2\pi \left[4x^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = 2\pi \left[4(8) - \left(\frac{2}{5}\right)(32)\right] = 2\pi \left[32 - \frac{64}{5}\right] = 2\pi \left(\frac{96}{5}\right) = \frac{192\pi}{5} \approx 120.64 u^3$$

Un solo ajuste (cambiar x por $6 - x$) y el resto del procedimiento es idéntico al caso "normal".

Solución por arandelas

Paso 1. Como el eje $x = 6$ es vertical, para usar arandelas hay que rebanar perpendicular a él, es decir, horizontalmente, integrando en y . Despejamos $x = y^2$ de $y = \sqrt{x}$. La región, en términos de y (de 0 a 2), va desde $x = y^2$ (izquierda) hasta $x = 4$ (derecha).

Paso 2. Como el eje está en $x = 6$, a la derecha de toda la región, el borde $x = 4$ (más cercano al eje) da el radio interior, y el borde $x = y^2$ (más lejano) da el radio exterior:

$$R(y) = 6 - y^2$$

$$r(y) = 6 - 4 = 2$$

Paso 3. Planteamos la integral:

$$V = \pi \int_0^2 [(6 - y^2)^2 - 2^2] dy = \pi \int_0^2 (32 - 12y^2 + y^4) dy$$

Paso 4. Resolvemos:

$$V = \pi [32y - 4y^3 + y^5/5]_0^2 = \pi \left[64 - 32 + \frac{32}{5} \right] = \pi(38.4) = \frac{192\pi}{5} \approx 120.64 u^3$$

Comparación

Ambos métodos dan exactamente $\frac{192\pi}{5}$, como debe ser. Pero capas cilíndricas solo exigió cambiar el radio de x a $(6 - x)$ y quedarse trabajando en x ; arandelas obligó a invertir la función ($x = y^2$), reconocer que el radio interior es constante ($r = 2$, porque el borde $x = 4$ es una recta vertical) y expandir un binomio al cuarto grado. Aquí ninguno es "imposible" como en el ejemplo de la cúbica, pero capas resulta más directo.

3.6 Ejercicio autónomos para el estudiante

Resuelva de manera independiente los siguientes ejercicios. Identifique en cada caso el radio (o los radios) de la sección transversal, plantee la integral correspondiente y resuelva mostrando cada paso.

1. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región bajo $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, entre $x = 0$ y $x = 3$, alrededor del eje x . (Este sólido es una semiesfera de radio 3 — compare su resultado con la fórmula del volumen de la esfera.)
2. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región bajo $f(x) = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$, alrededor del eje x .
3. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región bajo $f(x) = 1/x$, entre $x = 1$ y $x = 3$, alrededor del eje x . (Esta curva es la misma que genera la famosa "trompeta de Gabriel" cuando el intervalo se extiende a infinito.)
4. Calcule el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje x , la región entre $f(x) = \sqrt{x}$ (exterior) y $g(x) = x$ (interior), en el intervalo $[0, 1]$.
5. Calcule el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje x , la región entre $f(x) = x + 2$ (exterior) y $g(x) = x^2$ (interior). Halle primero los puntos de intersección para determinar el intervalo.
6. Calcule el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje x , la región entre $f(x) = \sqrt{x}$ (exterior) y $g(x) = x^3$ (interior), en el intervalo $[0, 1]$.
7. Calcule el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje y , la región bajo $f(x) = \sqrt{x}$, entre $x = 0$ y $x = 4$.
8. Calcule el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje y , la región bajo $f(x) = e^{(-x^2)}$, entre $x = 0$ y $x = 2$. (La curva de esta función es la campana de Gauss.)
9. Calcule el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje y , la región bajo $f(x) = 4 - x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$.

3.7 Respuestas de los ejercicios

1. $V = 18\pi \approx 56.55 u^3$
2. $V = 32\pi/5 \approx 20.11 u^3$
3. $V = 2\pi/3 \approx 2.09 u^3$
4. $V = \pi/6 \approx 0.52 u^3$
5. $V = 72\pi/5 \approx 45.24 u^3$
6. $V = 5\pi/14 \approx 1.12 u^3$
7. $V = 128\pi/5 \approx 80.42 u^3$
8. $V = \pi(1 - e^{-4}) \approx 3.08 u^3$
9. $V = 8\pi \approx 25.13 u^3$

REFERENCIAS:

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1: de una variable* (9.ª ed.). McGraw-Hill.

Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (8.^a ed.). Cengage Learning.

Thomas, G. B. (2015). *Cálculo: una variable* (13.^a ed.). Pearson Educación.

