

2. Métodos de Integración: Sustitución, Integración por Partes y Fracciones Parciales

2.1 Presentación de Tema a tratar

Muchas integrales que aparecen en los cursos de física e ingeniería no pueden resolverse aplicando directamente las reglas básicas de integración, pues involucran funciones compuestas, productos de funciones de distinta naturaleza o cocientes de polinomios. Este vacío en el manejo de técnicas más avanzadas suele ser uno de los puntos donde con mayor frecuencia se estanca el aprendizaje del cálculo integral, generando rezago académico y afectando la confianza del estudiante en cursos posteriores de su formación. Esta guía aborda tres competencias centrales: reconocer la estructura algebraica de una función, transformarla mediante el método de integración pertinente y ejecutar con precisión el procedimiento correspondiente. El desarrollo de estas competencias no solo amplía el repertorio técnico del estudiante para enfrentar con éxito las evaluaciones institucionales, sino que fortalece su juicio matemático y su autonomía frente a problemas que exigen decidir, entre varias alternativas, cuál es el camino de solución más eficiente.

2.2 Objetivo general

Calcular integrales indefinidas mediante la aplicación de los métodos de sustitución, integración por partes y fracciones parciales, seleccionando en cada caso la estrategia más eficiente a partir del análisis de la estructura algebraica de la función.

2.3 Resultado de aprendizaje

- Resolver integrales indefinidas directas empleando las reglas fundamentales de integración, recuperando habilidades prácticas que disminuyen la acumulación de dificultades en cursos de física e ingeniería.
- Calcular integrales mediante la aplicación de métodos avanzados como sustitución, integración por partes y fracciones parciales entre otros, incrementando el repertorio técnico necesario para resolver con autonomía y éxito las evaluaciones institucionales.
- Seleccionar el método de integración más eficiente analizando la estructura algebraica de la función, ejercitando el juicio matemático y la toma de decisiones que favorecen su empoderamiento y autonomía académica.

2.4 Explicación teórico / conceptual

2.4.1 Integración por sustitución (cambio de variable)

El método de sustitución se aplica cuando el integrando contiene una función compuesta junto con la derivada (o un múltiplo de ella) de su función interna. Stewart (2018) explica que, al introducir una nueva variable $u = g(x)$, con $du = g'(x)dx$, la integral original se transforma en una integral más simple en términos de la nueva variable u :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Una vez resuelta la integral en u , se deshace el cambio de variable sustituyendo u por $g(x)$ para expresar el resultado en función de x . La clave para reconocer este método consiste en identificar dentro del integrando una función y , explícita o implícitamente, la derivada de esa función.

2.4.2 Integración por partes

Cuando el integrando es el producto de dos funciones de naturaleza distinta (por ejemplo, un polinomio y una exponencial, o un polinomio y una función trigonométrica), Larson y Edwards (2010) recomiendan aplicar la integración por partes, derivada del producto de funciones:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

La elección adecuada de u y dv resulta determinante: se sugiere el orden de prioridad L-I-A-T-E (funciones Logarítmicas, Inversas trigonométricas, Algebraicas, Trigonómicas y Exponenciales) para seleccionar u de modo que du resulte más simple que u , y v sea calculable con facilidad a partir de la integración de dv .

2.4.3 Fracciones parciales

Cuando el integrando es una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ —cociente de dos polinomios— con el grado de $P(x)$ menor que el grado de $Q(x)$, Thomas (2015) plantea que la estrategia consiste en factorizar el denominador y descomponer la fracción en una suma de fracciones más simples, cuya forma depende del tipo de factores obtenidos en la factorización realizada del denominador. Se distinguen tres casos:

Caso 1. Factores lineales distintos. Por cada factor lineal $(x - a)$ que aparece una sola vez en el denominador, la descomposición incluye un término de la forma $\frac{A}{x - a}$:

$$\frac{P(x)}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}$$

Caso 2. Factores lineales repetidos. Si un factor lineal $(x - a)$ se repite n veces en el denominador, es decir, aparece como $(x - a)^n$ la descomposición debe incluir un término por cada una de las potencias del factor, desde 1 hasta n :

$$\frac{P(x)}{(x - a)^n} = \frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles. Cuando el denominador contiene un factor cuadrático $(x^2 + bx + c)$ que no puede factorizarse en números reales (discriminante negativo), el término correspondiente de la descomposición lleva un numerador lineal:

$$\frac{P(x)}{(x^2 + bx + c)} = \frac{(Ax + B)}{(x^2 + bx + c)}$$

En cualquiera de los tres casos, los coeficientes se determinan igualando numeradores y evaluando la expresión en valores convenientes de x (usualmente las raíces del denominador) o comparando coeficientes de igual potencia. Una vez descompuesta la fracción, cada término se integra de manera directa: los términos con factor lineal simple o repetido dan lugar a funciones logarítmicas o potencias de $(x - a)$, mientras que los términos con factor cuadrático irreducible conducen a funciones logarítmicas y arcotangente. Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al de $Q(x)$, es necesario realizar primero la división polinómica.

2.5 Ejercicio dirigido (andamiaje)

A continuación, se resuelve un ejemplo guiado para cada método, siguiendo paso a paso el procedimiento correspondiente.

a. Sustitución

1. Resolver $\int 2x(x^2 + 1)^3 dx$

Paso 1. Se identifica $u = x^2 + 1$, de donde si tomando su derivada $du = 2x dx$, expresión que ya aparece en el integrando.

Paso 2. Se reescribe la integral en términos de u :

$$\int u^3 du.$$

Paso 3. Se integra:

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C.$$

Paso 4. Se deshace la sustitución:

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C.$$

2. Resolver $\int x\sqrt{x + 3} dx$.

Paso 1. Se identifica $u = x + 3$, de donde $du = dx$. Como el integrando también contiene x (no solo $x + 3$), se despeja $x = u - 3$ para reescribir todo en términos de u .

Paso 2. Se sustituye:

$$\int x\sqrt{x + 3} dx = \int (u - 3)\sqrt{u} du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}}\right) du.$$

Paso 3. Se integra término a término:

$$\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}}\right) du = \left(\frac{2}{5}\right)u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + C.$$

Paso 4. Se deshace la sustitución ($u = x + 3$):

$$\int x \sqrt{x+3} dx = \left(\frac{2}{5}\right)(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

b. Integración por partes

1. Resolver $\int e^x \cos x dx$ (caso cíclico, que requiere aplicar el método dos veces).

Paso 1. Se aplica la fórmula una primera vez, para lo cual escogemos $u = e^x$ dado el orden según LIATE y derivamos $du = e^x dx$, por lo que lo demás será $dv = \cos(x) dx$, e integramos $v = \sin x$ omitiendo en primera instancia la constante de integración, aplicamos la fórmula de integración por partes descrita anteriormente

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Paso 2. Se aplica nuevamente la fórmula a la integral restante ya que esta tampoco tiene una primitiva directa, siguiendo el proceso anterior con $u = e^x$, $dv = \sin(x) dx$, $du = e^x dx$, $v = -\cos(x)$, tenemos:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Paso 3. Se sustituye este resultado en la expresión del paso 1:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right]$$

Paso 4. Se observa que la integral buscada aparece a ambos lados de la igualdad. Llamando $I = \int e^x \cos x dx$, se obtiene $2I = e^x(\sin x + \cos x)$, de donde:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$$

2. calcular $\int x \sin x dx$

Paso 1. Se elige $u = x$ (algebraica) y $dv = \sin x dx$, siguiendo el criterio LIATE.

Paso 2. Se calcula $du = dx$ y $v = -\cos x$.

Paso 3. Se aplica la fórmula:

$$\int x \sin(x) dx = x(-\cos x) - \int (-\cos(x))dx = -x \cos x + \int \cos x dx.$$

Paso 4. Se integra el término restante:

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

c. Fracciones parciales

1. Factores lineales distintos. Resolver: $\int \frac{(3x+5)}{(x-1)(x+2)} dx$

Paso 1. Se plantea $\frac{(3x+5)}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$, de donde $3x+5 = A(x+2) + B(x-1)$.

Paso 2. Se evalúa esta última expresión en las raíces: con $x = 1$, $8 = 3A$, luego $A = \frac{8}{3}$; con $x = -2$, $-1 = -3B$, luego $B = \frac{1}{3}$.

Paso 3. Se integra:

$$\int \frac{(3x+5)}{(x-1)(x+2)} dx = \left(\frac{8}{3}\right) \ln|x-1| + \left(\frac{1}{3}\right) \ln|x+2| + C.$$

2. Factores lineales repetidos. Resolver $\int \frac{(2x+3)}{(x-1)^2} dx$.

Paso 1. Se plantea $\frac{(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$, de donde $2x+3 = A(x-1) + B$.

Paso 2. Comparando coeficientes: $A = 2$ (coeficiente de x); $y - A + B = 3$, luego $B = 5$.

Paso 3. Se integra cada término:

$$\int \frac{(2x+3)}{(x-1)^2} dx = 2 \ln|x-1| - \frac{5}{(x-1)} + C.$$

3. Factores cuadráticos irreducibles. Resolver: $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)} dx$.

Paso 1. Se plantea $\frac{(3x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, de donde $3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$.

Paso 2. Comparando coeficientes: para x^2 se tiene $A + B = 0$; para x , $C = 3$; y el término independiente da $A = 1$, luego $B = -1$.

Paso 3. Se integra cada término:

$$\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)} dx = \ln|x| - \left(\frac{1}{2}\right) \ln(x^2+1) + 3 \arctan(x) + C$$

2.6 Ejercicio autónomos para el estudiante

Resuelva de manera independiente los siguientes ejercicios, identificando primero el método más apropiado y registrando todos los pasos del procedimiento.

1. Calcule $\int 6x^2 (x^3 - 4)^4 dx$.
2. Calcule $\int x^2 \ln(x) dx$.
3. Calcule $\int \frac{(7x-3)}{[(x+1)(x-3)]} dx$.
4. Calcule $\int \frac{4x-1}{(x+2)^2} dx$.
5. Calcule $\int \frac{5x+2}{x(x^2+4)} dx$.
6. Calcule $\int e^{2x} \cos(x) dx$.
7. Analice la integral $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ y, sin resolverla, justifique en máximo tres líneas qué método aplicaría y por qué, atendiendo a la estructura algebraica del integrando.

2.7 Respuestas de los ejercicios

1. $\left(\frac{2}{5}\right) (x^3 - 4)^5 + C$
2. $\left(\frac{x^3}{3}\right) \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$
3. $\left(\frac{5}{2}\right) \ln|x+1| + \left(\frac{9}{2}\right) \ln|x-3| + C$
4. $4 \ln|x+2| + \frac{9}{x+2} + C$
5. $\left(\frac{1}{2}\right) \ln|x| - \left(\frac{1}{4}\right) \ln(x^2+4) + \left(\frac{5}{2}\right) \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$
6. $e^{2x} \frac{(2 \cos(x) + \sin(x))}{5} + C$
7. La función $\frac{\ln(x)}{x}$ es una función compuesta en la que aparece explícitamente la derivada de $\ln(x)$, es decir, $\frac{1}{x}$; por ello el método más eficiente es la sustitución, tomando $u = \ln(x)$, lo cual conduce a una integral inmediata del tipo $\int u du$ sin necesidad de recurrir a partes o a fracciones parciales.

REFERENCIAS:

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1: de una variable* (9.ª ed.). McGraw-Hill.

Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: Transcendentes tempranas* (8.ª ed.). Cengage Learning.

Thomas, G. B. (2015). *Cálculo: una variable* (13.ª ed.). Pearson Educación.