

1. Sumas de Riemann

1.1 Presentación de Tema a tratar

Las sumas de Riemann constituyen la puerta de entrada al cálculo integral, pues permiten aproximar el área bajo la gráfica de una función mediante la suma de áreas de rectángulos contruidos sobre particiones del intervalo de estudio; esta guía acompaña al estudiante en el planteamiento y la resolución de dichas sumas, en la estimación numérica de integrales definidas a partir de aproximaciones geométricas y en la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo para relacionar la diferenciación con la integración, con el propósito de fortalecer el razonamiento cuantitativo y la confianza del estudiante frente a un contenido que con frecuencia genera rezago académico en el curso de Cálculo Integral.

1.2 Objetivo general

Calcular el área bajo la curva de una función mediante el planteamiento y la resolución de sumas de Riemann, como base conceptual y procedimental para la estimación de integrales definidas y su relación con el Teorema Fundamental del Cálculo.

1.3 Resultado de aprendizaje

- Calcular el área bajo la curva mediante el planteamiento y resolución de sumas de Riemann.
- Estimar el valor numérico de integrales definidas utilizando aproximaciones geométricas, desarrollando la habilidad de aproximación cuantitativa que fortalece la confianza del estudiante frente a contenidos que frecuentemente generan rezago.
- Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para establecer la relación entre la diferenciación y la integración, estructurando una visión matemática integrada que favorece la aprobación de la materia.

1.4 Explicación teórico /conceptual

1.4.1 El problema del área bajo una curva

Uno de los problemas clásicos del cálculo consiste en determinar el área de la región comprendida entre la gráfica de una función $f(x)$, continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$, y el eje horizontal. Cuando la región está delimitada por líneas rectas (rectángulos, triángulos, trapecios), su área puede calcularse con fórmulas geométricas elementales; sin embargo, cuando el borde superior de la región es una curva, estas fórmulas no bastan. Stewart (2018) señala que la estrategia natural para resolver este problema consiste en aproximar la región curva mediante figuras cuya área sí se conoce con exactitud: rectángulos.

1.4.2 Partición del intervalo

El primer paso consiste en dividir el intervalo en n subintervalos de igual longitud. A esta división se le llama partición regular del intervalo, y la longitud de cada subintervalo se denota como Δx y se calcula así:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Cada subintervalo tiene la forma $[x_{(i-1)}, x_i]$, con $i = 1, 2, \dots, n$, donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y cada punto de la partición se obtiene mediante:

$$x_i = a + i \cdot \Delta x.$$

1.4.3 Puntos muestra y construcción de los rectángulos

Sobre cada subintervalo se levanta un rectángulo cuya base es Δx y cuya altura corresponde al valor de la función evaluada en un punto muestra x_i^* , elegido dentro de ese subintervalo. Según el punto que se seleccione, se obtienen distintas variantes de la suma de Riemann, entre las que se destacan:

- Suma por la izquierda: el punto muestra es el extremo izquierdo de cada subintervalo, $x_i^* = x_{(i-1)}$.
- Suma por la derecha: el punto muestra es el extremo derecho de cada subintervalo, $x_i^* = x_i$.
- Suma del punto medio: el punto muestra es el punto medio del subintervalo, $x_i^* = \frac{(x_{(i-1)} + x_i)}{2}$.

Larson y Edwards (2010) destacan que, aunque las tres variantes aproximan la misma área, su precisión frente al valor exacto depende del comportamiento de la función (creciente, decreciente, cóncava) en el intervalo estudiado; por ejemplo, en una función creciente la suma por la derecha sobreestima el área real, mientras que la suma por la izquierda la subestima.

1.4.4 Definición de la suma de Riemann

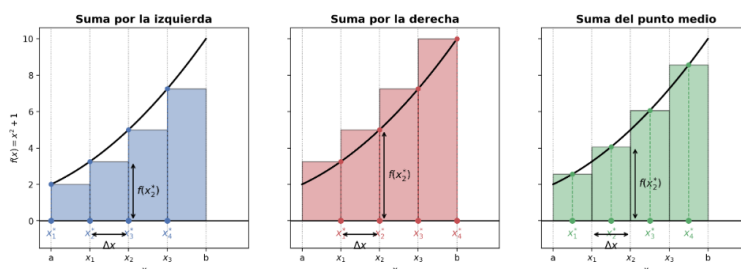
Formalmente, dada una función $f(x)$ continua en $[a, b]$, una partición regular en n subintervalos de longitud Δx y una elección de puntos muestra x_i^* en cada subintervalo, la suma de Riemann se define como:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x.$$

Esta expresión corresponde a la suma de las áreas (con signo) de los n rectángulos construidos sobre la partición. Cuando $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo, S_n representa una aproximación numérica del área bajo la curva.

Figura 1

Rectángulos de aproximación por la izquierda, por la derecha y del punto medio.



1.4.5 Relación con la integral definida

Thomas (2015) explica que, a medida que el número de subintervalos aumenta (y, en consecuencia, Δx se hace cada vez más pequeño), la suma de Riemann se aproxima cada vez más al área real bajo la curva, sin importar qué tipo de punto muestra se haya elegido. Este comportamiento conduce a la definición de la integral definida como el límite de la suma de Riemann cuando n tiende a infinito:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Esta relación es la razón por la cual el estudio de las sumas de Riemann antecede, en todo curso de cálculo integral, a la definición formal de la integral: comprender cómo se construye la suma discreta permite entender qué representa, en esencia, la integral definida.

1.5 Ejercicio dirigido (andamiaje)

1. **Aproximemos, mediante una suma de Riemann por la derecha con $n = 4$ subintervalos, el área bajo la curva de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.**

Paso 1. Calculamos el ancho de cada subintervalo: $\Delta x = \frac{(2-0)}{4} = 0.5$.

Paso 2. Identificamos los extremos derechos de cada subintervalo: $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$.

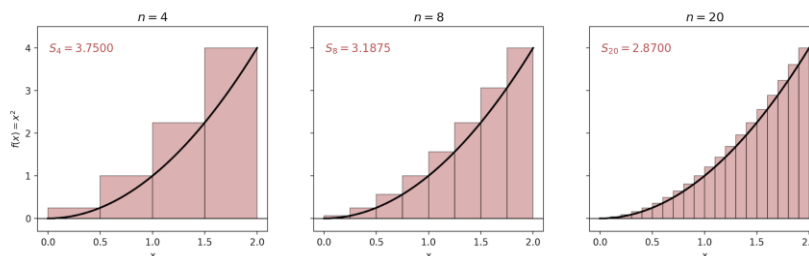
Paso 3. Evaluamos la función en cada punto muestra: $f(0.5) = 0.25$, $f(1.0) = 1.00$, $f(1.5) = 2.25$, $f(2.0) = 4.00$.

Paso 4. Sumamos las áreas de los cuatro rectángulos: $S_4 = (0.25 + 1.00 + 2.25 + 4.00) \cdot 0.5 = 3.75$.

El valor exacto del área, obtenido mediante la integral definida, es $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2.667$. La suma por la derecha (3.75) sobreestima el área real, tal como se espera en una función creciente. Si se aumenta el número de subintervalos a $n = 8$, la aproximación mejora a $S_8 = 3.1875$, y con $n = 20$ subintervalos se obtiene $S_{20} = 2.87$, cada vez más cercana al valor exacto de 2.667. Este comportamiento ilustra de manera concreta la idea de convergencia descrita en el apartado anterior.

Figura 2

Convergencia de la suma de Riemann por la derecha de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ al aumentar el número de subintervalos.



2. Calculemos $\int_0^3 x^2 dx$ mediante el límite de una suma de Riemann por la derecha con n subintervalos.

Paso 1. $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$.

Paso 2. Los extremos derechos son $x_i = 0 + i \cdot \Delta x = \frac{3i}{n}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Paso 3. Evaluamos la función: $f(x_i) = \left(\frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{9i^2}{n^2}$.

Paso 4. Construimos la suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{9i^2}{n^2}\right) \left(\frac{3}{n}\right) = \left(\frac{27}{n^3}\right) \sum_{i=1}^n i^2$$

Paso 5. Usamos la fórmula $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y simplificamos:

$$S_n = \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}$$

Paso 6. Tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right] = 9$$

El resultado coincide exactamente con el valor de la integral definida ($\int_0^3 x^2 dx = \frac{27}{3} = 9$), lo cual confirma que, a medida que el número de subintervalos crece indefinidamente, la suma de Riemann converge al área exacta bajo la curva.

1.6 Ejercicio autónomos para el estudiante

Resuelva de manera independiente los siguientes ejercicios, aplicando el procedimiento estudiado en la explicación teórica y en el ejercicio dirigido. Registre todos los pasos de su procedimiento (partición, puntos muestra, evaluación de la función y suma final).

1. Calcule la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 4]$, utilizando $n = 4$ subintervalos.
2. Para la misma función y el mismo intervalo del ejercicio anterior ($f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 4]$, $n = 4$), calcule ahora la suma de Riemann por la izquierda y la suma del punto medio. Compare los tres resultados (derecha, izquierda y punto medio) y explique cuál de las tres se aproxima más al valor real del área.
3. Un vehículo se desplaza en línea recta con una velocidad dada por $v(t) = 3t$ (en metros por segundo), donde t se mide en segundos. Utilice una suma de Riemann por la derecha con $n = 5$ subintervalos para aproximar la distancia recorrida por el vehículo entre $t = 0$ y $t = 5$ segundos.
4. Explique, en un párrafo de máximo cinco líneas, qué le sucede a la suma de Riemann de una función a medida que el número de subintervalos n aumenta indefinidamente, y relacione esta idea con el concepto de integral definida trabajado en el apartado 1.4.5.

1.7 Respuesta a los ejercicio

1. S_4 (derecha) ≈ 6.146 .
2. S_4 (izquierda) ≈ 4.146 ; S_4 (punto medio) ≈ 5.384 . La suma del punto medio es la que más se acerca al valor exacto (≈ 5.333).
3. Distancia aproximada ≈ 45 metros.
4. La suma de Riemann converge hacia el valor exacto del área bajo la curva, es decir, hacia la integral definida $\int_a^b f(x) dx$

REFERENCIAS:

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1: de una variable* (9.ª ed.). McGraw-Hill.

Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (8.ª ed.). Cengage Learning.

Thomas, G. B. (2015). *Cálculo: una variable* (13.ª ed.). Pearson Educación.