

5. Funciones de variable real

5.1 Presentación

Las funciones de variable real son esenciales en matemáticas, ya que modelan relaciones entre variables en diversas disciplinas. Esta guía tiene como objetivo ofrecer una comprensión integral de las funciones, abarcando su definición, gráficas, dominio y rango. Se explorarán tipos de funciones como polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, cada una con características únicas y aplicaciones prácticas. A través de teoría, ejemplos y ejercicios, los estudiantes aprenderán a interpretar información de las gráficas y a identificar propiedades como las asíntotas. Con este enfoque, se busca desarrollar habilidades sólidas para aplicar conceptos de funciones en la resolución de problemas matemáticos y situaciones del mundo real.

5.2 Objetivo General

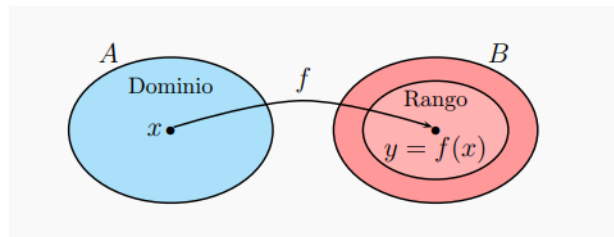
Desarrollar en los estudiantes la capacidad de reconocer y analizar diferentes tipos de funciones de variable real, a través de su definición, gráfica, dominio, rango y asíntotas, para aplicar estos conocimientos en la resolución de problemas matemáticos.

5.3 Resultados de Aprendizaje

- Definir las características fundamentales de diversas funciones (polinómicas, racionales, radicales) a partir de su representación gráfica, identificando sus propiedades distintivas.
- Determinar el dominio y el rango de diferentes tipos de funciones, utilizando métodos analíticos y gráficos para resolver problemas relacionados con la continuidad y el comportamiento de las funciones.
- Identificar y analizar las asíntotas de funciones, reconociendo su importancia en la representación gráfica y en la comprensión del comportamiento de las funciones en límites y puntos críticos.

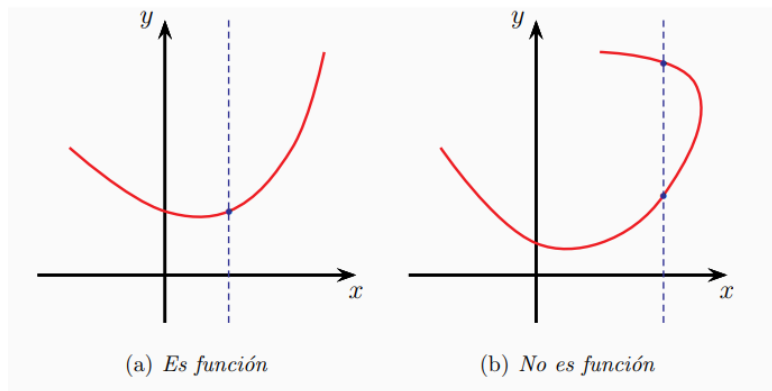
5.4 Función de Variable Real

Una **función** de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia que le asigna a cada elemento x en A uno y solo un elemento y en B . El conjunto A se llama **dominio** de la función y B se denomina **conjunto de llegada** o **codominio**.



- Las funciones se denotan generalmente con letras minúsculas como f, g, h .
- $f(x)$ simboliza la imagen de x mediante f y se lee “efe de equis”.
- En la expresión $y = f(x)$, se dice que “ x ” es la variable independiente y “ y ” la variable dependiente.
- Al conjunto $\{y \in B: y = f(x), x \in A\}$ se le denomina **imagen** o **recorrido (rango)** de f .

Criterio de la recta vertical: Si toda recta vertical corta la gráfica de una relación en un único punto, entonces la relación es una función.



Tomado de Uzuriaga López et al. (2025, p. 199).

Las funciones reales se clasifican en: polinómicas, racionales, radicales, trascendentes y especiales.

5.4.1 Funciones polinómicas

La forma general de una función polinómica es $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales que representan los coeficientes del polinomio y el número natural n expresa su grado, si $a_n \neq 0$.

Algunas clases de funciones polinómicas son constantes, lineales, cuadráticas y cúbicas.

5.4.1.1 Función constante

Una **función constante** es de la forma $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$.

RECUERDA: Si f es una función constante se tiene que: $\text{Dom } f = \mathbb{R}, \text{Ran } f = \{k\}$

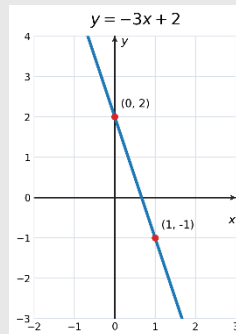
5.4.1.2. Función Lineal

Una **función lineal** es de la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b el intercepto con el eje y . Su gráfica describe una línea recta que pasa por el punto $(0, b)$. El número b es el punto de corte con el eje y . Si $m > 0$, la función lineal es creciente, si $m < 0$, la función es decreciente.

RECUERDA: Si $f(x) = mx$ es una función lineal, con pendiente m : $\text{Dom } f = \mathbb{R}, \text{Ran } f = \mathbb{R}$ y pasa por $(0,0)$.

Ejemplo. Identifique los elementos de la función $f(x) = -3x + 2$.

Solución: La pendiente de $f(x)$ es $m = -3$, es decir, es **decreciente**. Corta al eje y en $y = 2$. Además, $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ y $\text{Ran}f = \mathbb{R}$. La gráfica se muestra a la derecha.



5.4.1.3. Función Cuadrática

Una **función cuadrática** es aquella de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = a(x + h)^2 + k$, donde el vértice tiene coordenadas (h, k) con $a \neq 0$ en cada caso. La gráfica de la función cuadrática es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ o abre hacia abajo si $a < 0$. El vértice de la parábola se expresa con las coordenadas $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. Su dominio es el conjunto de los números reales y su rango $\left[f\left(\frac{-b}{2a}, \infty\right)\right]$ si $a > 0$ o $\left[-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$ si $a < 0$.

Ejemplo. Halle el dominio y el rango de la función $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

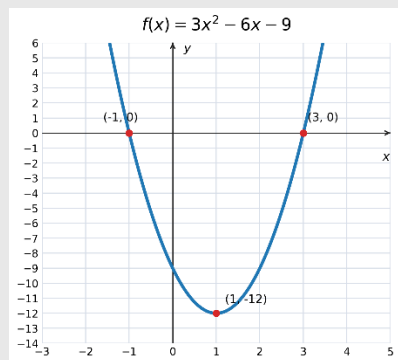
Solución: Primero, se transforman la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \rightarrow f(x) = 3(x^2 - 2x) - 9. \text{ Se factoriza} \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) - 9 - 3. \text{ Se complementan los cuadrados.} \\ &= 3(x - 1)^2 - 12. \end{aligned}$$

Como $a = 3$, $h = 1$ y $k = -12$, el **vértice** es $(h, k) = (1, -12)$

Luego, se pueden encontrar las raíces de la parábola utilizando la fórmula cuadrática o factorizando, así: $f(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$. Por tanto $f(x)$, tiene como raíces a: $x = -1$ y $x = 3$.

Como $a > 0$ la parábola abre hacia arriba, su dominio es $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ y su rango $\text{Ran}f = [-12, +\infty)$.



5.4.1.4 Funciones racionales

Una función f es una **función racional** si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x)$ no es el polinomio cero. El **dominio** de f es el conjunto de los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$. Para trazar la gráfica de una función racional es importante tener en cuenta los valores para los cuales la función no está definida.

- **Asíntota vertical:** La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$. Para determinar el comportamiento de la función cerca de la asíntota se realiza una tabla de valores para la función, tomando valores cercanos a $x = a$.

- **Asíntota horizontal:** Dada la función racional definida por:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Es posible afirmar que:

Si $n < m$, entonces, la función f tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$ (eje x).

Si $n = m$, entonces, la función f tiene una asíntota horizontal en la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$.

Si $n > m$, entonces, la función f no tiene asíntota horizontal.

- **Asíntota oblicua:** Si el exponente del numerador es igual al exponente del denominador más 1; existe una asíntota oblicua. La ecuación de la recta $y = mx + b$, se halla haciendo la división de los polinomios.

Ejemplo.

1. Determine el dominio de las siguientes funciones racionales.

a. $f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$ Determine los puntos para los cuales el denominador es 0.

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 2 \text{ o } x = -2$$

Por tanto, $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

b. $g(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}$ Determine los puntos para los cuales el denominador es 0.

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = (x - 3)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 3 \text{ o } x = -2$$

Por tanto, $\text{Dom} g = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

2. Trace la gráfica de $f(x) = \frac{4x^2+x}{2x^2+x}$. Luego, halle su dominio y su rango.

Primero, se determinan los ceros o raíces del numerador y del denominador factorizando.

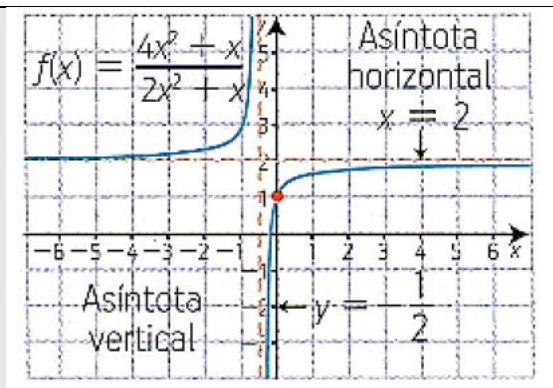
$$f(x) = \frac{4x^2+x}{2x^2+x} = \frac{x(4x+1)}{x(2x+1)}.$$

Luego, $f(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{4}$. Además, $f(x)$ no está definida para $x = 0$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Segundo, la asíntota vertical es la recta $x = -\frac{1}{2}$.

Tercero, como $x = 0$ no pertenece al dominio, $f(x)$ no interseca al eje y .

Cuarto, como el grado del polinomio del numerador y del polinomio del denominador son iguales, entonces la función tiene una asíntota horizontal en la recta $y = \frac{4}{2}$ o $y = 2$.



RECUERDA:

- Para determinar el dominio de una función racional se buscan los valores de x para los cuales el denominador es 0. Estos valores se excluyen del dominio.
- **Pasos para graficar una función racional:**
 1. Determinamos las raíces (o cero) del numerador y del denominador, es decir, los valores de x para los cuales $f(x) = 0$ y $f(x)$ no está definida.
 2. Hallamos las asíntotas verticales, si existen.
 3. Encontramos el intercepto con el eje y , es decir, $f(0)$.
 4. Determinamos la asíntota horizontal, si existe.
 5. Construimos una tabla de valores para obtener los puntos suficientes para garantizar un buen bosquejo de la gráfica.

5.4.1.5 Funciones con radicales

Una **función radical** es una función de la forma $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ en la que $h(x)$ es una función polinómica o racional. A continuación, se muestran ejemplos de funciones radicales:

$$f(x) = \sqrt{x+5}; \quad g(x) = \sqrt[3]{x-1}; \quad h(x) = \sqrt{\frac{x+3}{3x+4}}; \quad m(x) = \frac{(x+3)^{\frac{1}{2}}}{2x-5}$$

El dominio de una función radical depende del índice de la raíz.

- Si el índice es par, la función no está definida de los valores de x para los cuales el radicando negativo.
- Si el índice es impar, la función está definida para todo los números reales, salvo las restricciones del radicando.
- Si la función posee un polinomio en el denominador, hay que considerar los principios de graficación vistos en las funciones racionales.

Ejemplos.

1. Construya las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x} + 2$, $n(x) = \sqrt{x} - 2$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ y $m(x) = \sqrt{x-2}$ y analícelas.

Solución: Se construyen las tablas de valores:

x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3
$h(x)$	2	3	4	5
$n(x)$	-2	-1	0	1

x	-2	-1	2	7
$g(x)$	0	1	2	3

x	2	3	6	11
$m(x)$	0	1	2	3

Al analizar las gráficas se observa lo siguiente:

- Las gráficas de $h(x)$ y $n(x)$ se desplazan verticalmente dos unidades hacia arriba y dos unidades hacia abajo respectivamente, en relación con la gráfica de $f(x)$.
- Las gráficas de $g(x)$ y $m(x)$ se desplazan horizontalmente dos unidades hacia la izquierda y dos unidades hacia la derecha, respectivamente, en relación con la gráfica de $f(x)$.

- $Dom f(x) = Dom h(x) = Dom n(x) = [0, +\infty)$

$$Dom g(x) = [-2, +\infty) \text{ y } Dom m(x) = [2, +\infty)$$

- $Ran f(x) = Ran g(x) = Ran m(x) = [0, +\infty)$
 $Ran h(x) = [2, +\infty)$ y $Ran n(x) = [-2, +\infty)$

2. Trace la gráfica de la función radical $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$

Primero, se determinan para qué valores de x el radicando es mayor o igual a 0. Para ello, se soluciona $\frac{x-3}{2} \geq 0 \rightarrow x \geq 3$. Por lo anterior, $f(x)$ no está definida para $x < 3$. Además $f(x) = 0$, si $x = 3$.

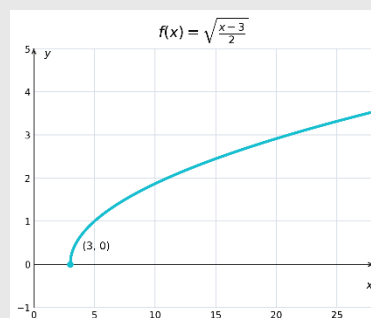
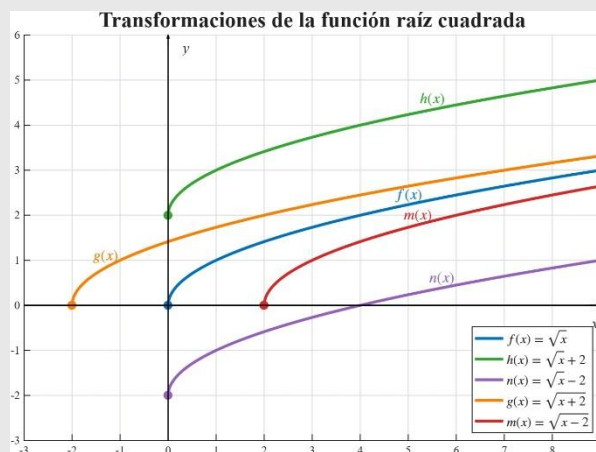
Segundo, no hay asíntotas verticales.

Tercero, $f(x)$ no interseca al eje y , ya que no está definida para $x = 0$

Cuarto, $f(x)$ no tiene asíntota horizontal.

Por último, $Dom f = [3, +\infty)$ y $Ran f = [0, +\infty)$.

La gráfica se muestra a la derecha.



5.4.2 Funciones Especiales:

Existen funciones que no se pueden representar mediante una única expresión algebraica y algunas otras no presentan una gráfica con un trazo continuo. Tales funciones requieren un tratamiento especial por lo cual se estudian de manera independiente. Este tipo de funciones son: funciones a trozos; valor absoluto; parte entera.

En esta guía se estudiará el comportamiento de las funciones a trozos y valor absoluto.

5.4.2.1 Funciones a Trozos

Una función formada por la unión de dos o más funciones, cada una de ellas definida en intervalos disyuntos, recibe el nombre de **función segmentada** o **función a trozos**.

Una función a trozos presenta diferentes expresiones algebraicas en determinados intervalos; en forma general, una función a trozos es de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in I_2 \\ \dots & \text{si } \dots \\ f_n(x) & \text{si } x \in I_n \end{cases} \quad \text{donde } I_i \cap I_j = \emptyset \text{ con } I_i, i, j = 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j$$

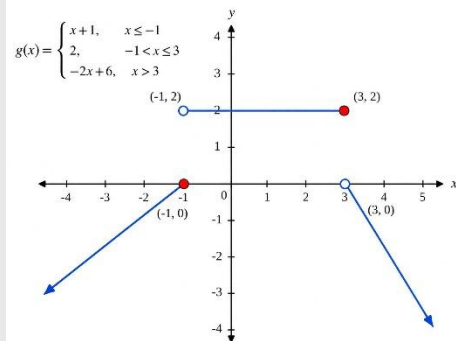
La gráfica de $g(x)$ está formada por todas las partes de $g_i(x)$. El dominio y el rango de $g(x)$ es la unión de los dos dominios y los rangos de cada una de las partes que la forman.

Ejemplo: La función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ g_2(x) = 2 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ g_3(x) = -2x + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, es decir, definida por intervalos.

$Dom\ g(x) = (-\infty, -1] \cup (-1, 3] \cup (3, \infty) = \mathbb{R}$; $Ran\ g(x) = (-\infty, 0] \cup \{2\}$. La gráfica de la función $g(x)$ es la unión de cada una de las gráficas de g_1 , g_2 y g_3 como se muestra en la figura anterior.

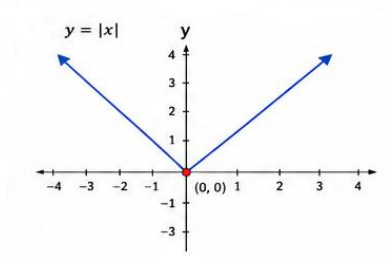


5.4.2.2 Función Valor Absoluto

La función valor absoluto es un caso particular de las funciones a trozos. Esta función asigna a cada número real del dominio su valor absoluto, y está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales: $Dom f(x) = \mathbb{R}$. El rango de la función es el conjunto de los números reales no negativos. Es decir, $Ran f(x) = [0, \infty)$. La gráfica de la función valor absoluto es:



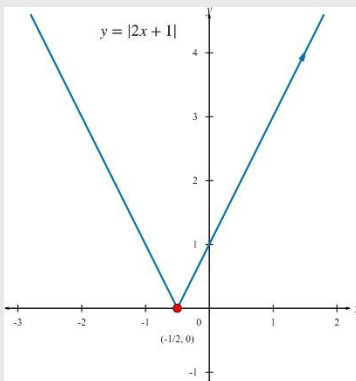
Ejemplos: Representar gráficamente cada función. Luego, determinar su dominio y su rango.

1. $f(x) = |2x + 1|$

Solución: Primero, se escribe la función según la definición de valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } 2x + 1 \geq 0 \\ -(2x + 1), & \text{si } 2x + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{es decir, } f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x + 1), & \text{si } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego, se grafica cada parte de acuerdo con la definición. La grafica de la función es:



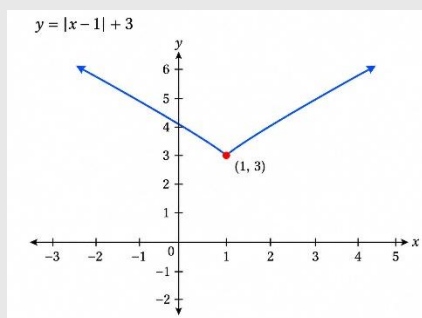
$$Dom f(x) = \mathbb{R} \text{ y } Ran f(x) = [0, +\infty).$$

2. $f(x) = |x - 1| + 3$.

Solución: Primero, se define la función $f(x) = |x - 1| + 3 = \begin{cases} (x - 1) + 3 & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) + 3 & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases}$ es decir;

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 4 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

La grafica de la función es:



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \text{ y } \text{Ran } f = [3, +\infty).$$

5.5 Sección de ejercicios.

1. Halle el dominio de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^2 + 1$ b. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ c. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$ d. $f(x) = \sqrt[3]{t-1}$

e. $g(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$ f. $f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

2. Determine los dominios de las funciones siguientes y bosqueje sus gráficas.

a. $f(x) = 2x - 4$ b. $f(x) = x^2 - 2x$ c. $f(x) = 16 - x^2$ d. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e. $f(x) = \frac{2}{x-3}$

f. $f(x) = |x| - 1$ g. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 9 - x^2, & 0 < x \leq 3 \\ x - 3, & x > 3 \end{cases}$

3. En un estudio sobre la calidad del agua de un río, se observa que durante cierto periodo la temperatura del agua, medida en grados Celsius, tiene una relación aproximadamente lineal con el tiempo, medido en horas. A las 8:00 a. m. la temperatura era de 18°C, mientras que a las 2:00 p. m. alcanzó 30°C.

- Expresar la temperatura T como una función lineal del tiempo t , considerando como $t = 0$ las 8:00 a. m.
- Determinar la temperatura del agua a las 12:00 del mediodía.
- ¿A qué hora se alcanzaría una temperatura de 36°C, si se mantiene la misma tendencia?

4. En una reserva natural se dispone de 40 metros de cerca para delimitar una zona rectangular destinada a la recuperación de vegetación. Se desea construir el rectángulo de mayor área posible utilizando toda la cerca disponible.

Si x representa el ancho de la zona, entonces el largo puede expresarse como $40 - 2x$.

- Expresar el área A de la zona como una función cuadrática de x .
- Determinar las dimensiones que permiten obtener el área máxima.

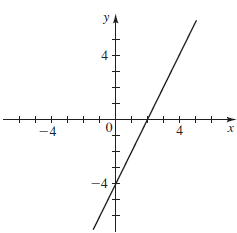
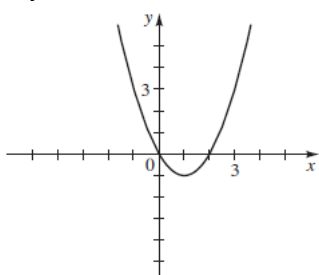
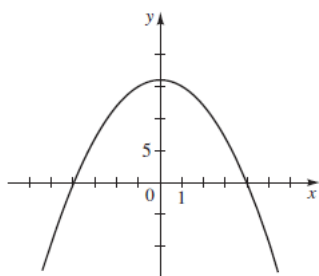
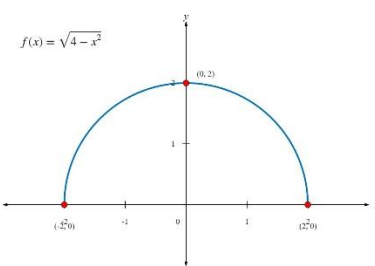
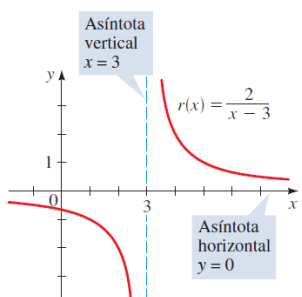
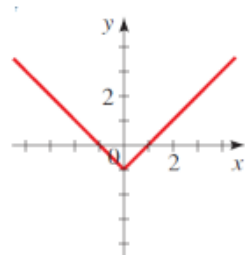
c. ¿Cuál es el área máxima que puede destinarse a la recuperación de vegetación?

5.6 Respuestas de los ejercicios

1.

a. $(-\infty, \infty)$	b. $\{x x \neq \pm 1\}$	c. $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$
d. $(-\infty, \infty)$	e. $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$	f. $[-2, 3) \cup (3, \infty)$

2.

a. $D_f = (-\infty, \infty)$ 	b. $D_f = (-\infty, \infty)$ 	c. $D_f = (-\infty, \infty)$ 
d. $D_f = \{x -2 \leq x \leq 2\}$ 	e. $D_f = \{x x \neq 3\}$ 	f. $D_f = (-\infty, \infty)$ 

3. a. $T(t) = 2t + 18$

b. La temperatura será de 26°C .

c. A las 5 p.m.

4. a. $A(x) = -2x^2 + 40x$

b. Dimensiones que maximizan el área: $10m \times 20m$

c. Área máxima: $200m^2$

Bibliografía

Guía de trabajo Matemáticas No. 7 (2021)

<https://elvalordeunamodacolgalan.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/08/guia-de-trabajo-matematicas-no.-7-11c2b0.pdf>

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2020). *Precalculus: Mathematics for Calculus* (6th ed.). Cengage Learning.

- Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2008). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía (5.^a ed.). Pearson Educación.
- Uzuriaga López, V. L., Martínez Acosta, A., & Palacio Loaiza, L. E. (2025). *Matemática básica para la gestión ambiental: Libro de trabajo y herramientas didácticas*. Ediciones de la U.