

4. Línea Recta

4.1 Presentación

La línea recta es un concepto fundamental en matemáticas, con aplicaciones en diversas disciplinas como la geometría y la física. Esta guía tiene como objetivo ofrecer una comprensión profunda de la línea recta, abordando temas esenciales como la pendiente, las propiedades de la recta y las ecuaciones algebraicas que la describen. Se explorará la forma estándar de la ecuación de la recta y su representación gráfica, lo que permitirá a los estudiantes visualizar el comportamiento de diferentes rectas en el plano cartesiano. También se discutirán las características de las rectas paralelas y perpendiculares. La guía incluye teoría, ejemplos ilustrativos y ejercicios prácticos para fortalecer el aprendizaje, facilitando así la aplicación de estos conceptos en situaciones reales. Con este enfoque integral, se espera que los estudiantes desarrollen habilidades sólidas en el manejo de la línea recta.

4.2 Objetivo General

Desarrollar en los estudiantes una comprensión sólida de la línea recta, abarcando su pendiente, propiedades, ecuaciones algebraicas y gráficas, así como su relación con rectas paralelas y perpendiculares, para que puedan aplicar estos conceptos en la resolución de problemas matemáticos y en situaciones cotidianas.

4.3 Resultados de Aprendizaje

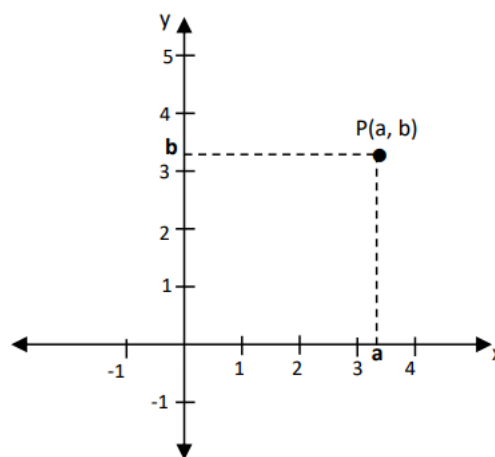
- Identificar y calcular la pendiente de una recta a partir de dos puntos dados, interpretando su significado en contextos matemáticos y aplicados.
- Derivar y reconocer la ecuación de la recta en sus diferentes formas (pendiente-intersección y general), aplicando estos conocimientos para graficar rectas en el plano cartesiano.
- Analizar y distinguir las características de las rectas paralelas y perpendiculares, utilizando sus pendientes para resolver problemas relacionados con la geometría y la representación gráfica.

4.4 Línea Recta

4.4.1. Ejes de coordenadas

- El sistema de ejes coordenados está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical llamadas ejes.
- El eje horizontal (eje x) se denomina eje de las abscisas y el eje vertical (eje y) se denomina eje de las ordenadas.
- Sobre el sistema de ejes coordenados se pueden ubicar todos los pares ordenados de la forma (a, b) , como lo muestra la figura.

En el punto $P(a, b)$ los elementos a y b se llaman coordenadas del punto P .



4.4.2. Distancia entre dos puntos del plano

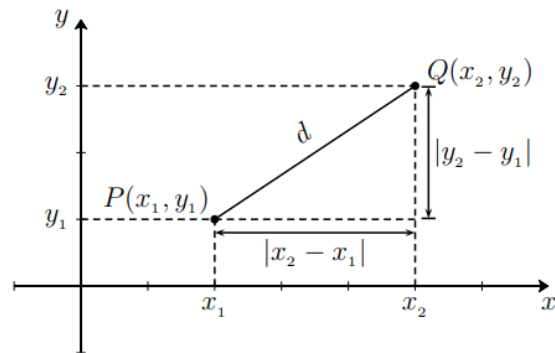
Supongamos que $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano tal como se observa en la figura.

La distancia entre P y Q se puede determinar, por ejemplo mediante el Teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

$$(\overline{PQ})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Así la distancia de P a Q es:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



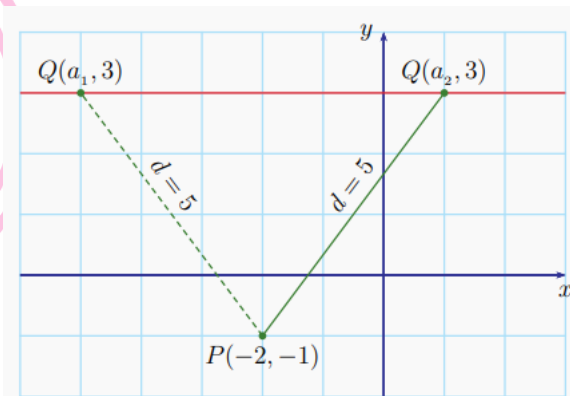
Ejemplos:

1. Hallar la distancia entre los puntos $A(-4, 7)$ y $B(3, -5)$ es:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-5 - 7)^2} = \sqrt{49 + 144} = \sqrt{193}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{193}$$

2. Encuentre los valores de a , si existen, de modo que los puntos $P(-2, -1)$ y $Q(a, 3)$ estén a 5 unidades de distancia.



Tomado de Uzuriaga López et al. (2025, p. 173).

$P(-2, -1)$ y $Q(a, 3)$, $d = 5$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$5 = \sqrt{(a + 2)^2 + (3 + 1)^2}$$

$$25 = (a + 2)^2 + (3 + 1)^2$$

$$25 = a^2 + 4a + 4 + 16$$

$$0 = a^2 + 4a - 5$$

$$0 = (a + 5)(a - 1)$$

$$a = -5 \vee a = 1$$

4.4.3. Representación Gráfica de la Línea Recta

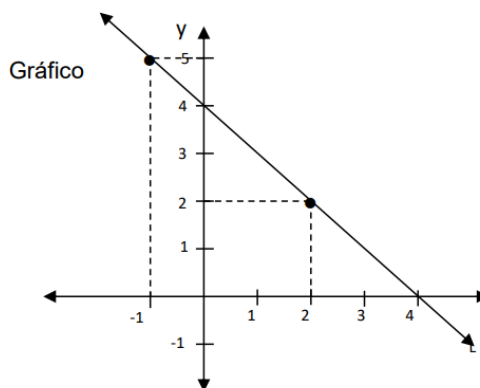
En toda igualdad de la forma $ax + by = c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, representa una ecuación lineal con dos incógnitas, las soluciones son pares ordenados de la forma (x, y) . Este par ordenado (x, y) corresponde a un punto del plano cartesiano.

Ejemplo:

1. La ecuación $L: x + y = 4$

Tabla de valores

x	y	(x, y)
2	2	(2,2)
1	3	(1,3)
0	4	(0,4)
-1	5	(-1,5)

**Observaciones:**

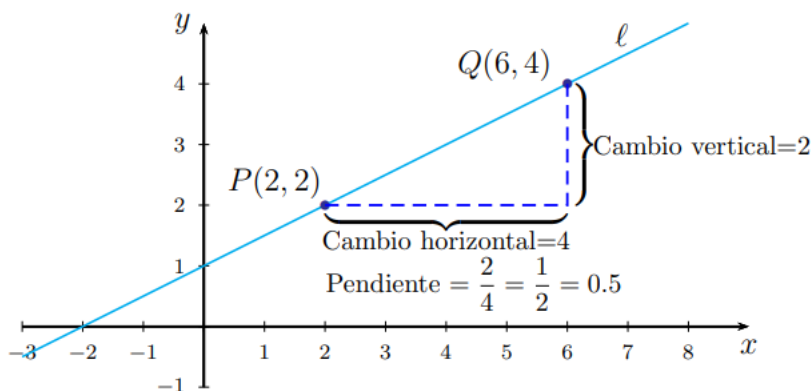
- a) A toda ecuación lineal (de primer grado) con dos incógnitas le corresponde, gráficamente, una recta.
- b) Cada par ordenado de números (x, y) corresponde a las coordenadas de un punto que es solución de la ecuación dada; es decir, satisface esta ecuación.
- c) Los puntos que cada par ordenado representa, pertenecen a la recta correspondiente.

4.4.4. Pendiente de una Recta

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} = \left(\frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} \right)$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.



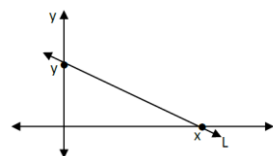
Tomado de Uzuriaga López et al. (2025, p. 178).

Resumen. Se puede caracterizar la orientación de una recta conociendo información sobre su pendiente.

Pendiente cero:	recta horizontal.
Pendiente indefinida:	recta vertical.
Pendiente positiva:	recta que crece (sube de izquierda a derecha).
Pendiente negativa:	recta que decrece (desciende de izquierda a derecha).

4.4.5. Puntos de intersección de una recta con los ejes coordenados

Según la gráfica que se muestra a continuación, los puntos donde la recta L corta al eje x son de la forma $(x, 0)$ y donde corta al eje y , de la forma $(0, y)$.



Ejemplo:

Hallar la intersección de la recta $2x - 3y = 12$ con los ejes coordenados.

Solución

Intersección con el eje x : se hace $y = 0$

$$2x - 3y = 12$$

$$2x - 3(0) = 12 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

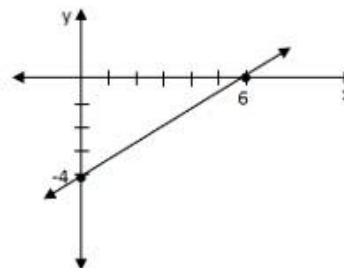
Así, la recta corta al eje x en el punto $(6, 0)$

Intersección con el eje y : se hace $x = 0$

$$2x - 3y = 12$$

$$2(0) - 3y = 12 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4$$

Así, la recta corta al eje y en el punto $(0, -4)$



4.4.6. Ecuación de la Línea Recta

Toda igualdad de la forma $ax + by = c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, también se puede escribir en la forma $y = mx + b$, es decir como una función, donde m es la pendiente o *coeficiente de dirección* y b es la intersección de la recta con el eje y , llamada también *coeficiente de posición*.

De esta forma, podemos afirmar que una recta está perfectamente definida si se conocen:

1. Dos puntos diferentes.

Ejemplo:

Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1, -3)$ y $Q(3, 1)$.

Solución: La pendiente de l es:

$$m = \frac{1 - (-3)}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

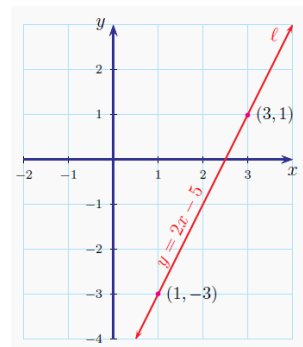
Como $y = mx + b$, considerando el punto $P(1, -3)$

con $x = 1$ e $y = -3$ tenemos:

$$y = mx + b$$

$$-3 = 2(1) + b \Rightarrow -3 - 2 = b \Rightarrow -5 = b$$

Luego: $y = 2x - 5$ es la ecuación pedida.



2. Un punto y su pendiente.

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo:

Determine una ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$

Solución:

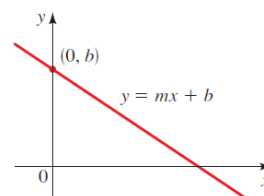
Usando la forma punto - pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como:

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 3$$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ es la ecuación pedida.

3. La pendiente y la intersección con el eje y.

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es: $y = mx + b$



Ejemplo:

a. Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

b. Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$

Solución:

a. Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente - punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos: $y = 3x - 2$

b. Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

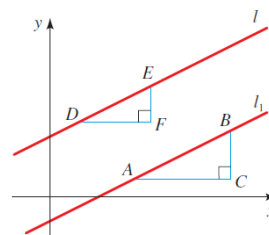
$$3y - 2x = 1 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

De la forma pendiente - intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje y es $b = \frac{1}{3}$

4.4.7. Rectas Paralelas y Perpendiculares

Rectas Paralelas:

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente. $m_1 = m_2$



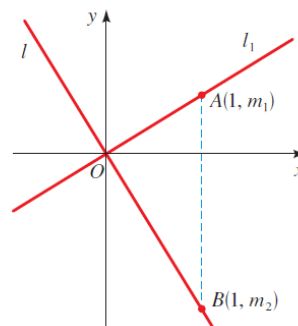
Rectas perpendiculares:

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (Pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).



Ejemplo:

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ que es **paralela** a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

Solución:

Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente – intersección.

$$4x + 6y + 5 = 0 \Rightarrow 6y = -4x - 5 \Rightarrow y = -\frac{4}{6}x - \frac{5}{6} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es **paralela** a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto – pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5) \Rightarrow y - 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \Rightarrow \text{Multiplicamos por 3}$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \Rightarrow \text{Acomodamos la ecuación: } 2x + 3y - 16 = 0 \text{ (ecuación de la recta requerida).}$$

2. Encuentre la ecuación de la recta que es **perpendicular** a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

Solución:

Del ejemplo anterior encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida para por $(0, 0)$, usando la forma punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ tenemos:

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \text{ (ecuación de la recta requerida).}$$

4.5 Sección de ejercicios

1. Los vértices de un triángulo son $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(7, -1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado BC , verificar que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC .

2. Obtenga una ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y que es paralela a la recta cuya ecuación es $x + 2y - 2 = 0$. Dibujar las rectas

3. Obtenga una ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 4)$ y que es perpendicular a la recta cuya ecuación es $-2x - y + 4 = 0$. Dibujar las rectas.
4. Sea la recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, 4)$
- Halle la ecuación de la recta l_2 que pasa por el punto $(5, 4)$ y es perpendicular a la recta l_1 . Ilustre gráficamente.
 - Halle la intersección de las rectas l_1 y l_2 halladas anteriormente.
5. Hallar el valor de k , para que $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

4.6 Respuestas de los ejercicios

2. $x + 2y - 8 = 0$

3. $x - 2y + 3 = 0$

4. a) $x - 2y + 3 = 0$

4. b) La intersección de las rectas l_1 y l_2 es el punto $(1, 2)$

5. $k = 4$

Bibliografía

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2020). Precalculus: Mathematics for Calculus (6th ed.). Cengage Learning.
- Uzuriaga López, V. L., Martínez Acosta, A., & Palacio Loaiza, L. E. (2025). *Matemática básica para la gestión ambiental: Libro de trabajo y herramientas didácticas*. Ediciones de la U.