

3. DESIGUALDADES

3.1 Presentación

La presente guía tiene como objetivo introducir al estudiante en el estudio de las desigualdades lineales, cuadráticas y racionales, las cuales son fundamentales para el análisis y la resolución de problemas algebraicos. Se abordan los conceptos esenciales, los procedimientos de solución, así como ejercicios resueltos que facilitan la comprensión de cada tema. Además, el estudiante desarrollará habilidades para resolver desigualdades lineales, cuadráticas y racionales, representando su conjunto solución tanto en la recta numérica como en notación de intervalo. La guía también incluye ejercicios propuestos que buscan fortalecer el razonamiento matemático y fomentar un aprendizaje autónomo.

3.2 Objetivo General

Desarrollar en los estudiantes habilidades para resolver desigualdades lineales, cuadráticas y racionales, enfatizando su comprensión teórica y aplicación práctica, necesarias para el análisis de problemas algebraicos y su resolución en situaciones cotidianas.

3.3 Resultados de Aprendizaje

- Explicar los conceptos fundamentales de las desigualdades lineales, cuadráticas y racionales, identificando sus características y aplicaciones en contextos matemáticos y cotidianos.
- Resolver desigualdades de diferentes tipos, aplicando procedimientos adecuados y representando sus soluciones en la recta numérica y en notación de intervalo.
- Fomentar el razonamiento crítico mediante la resolución de ejercicios propuestos, promoviendo un aprendizaje autónomo y la aplicación de estrategias para resolver problemas algebraicos en diversas situaciones.

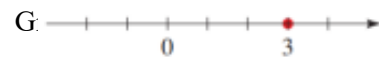
3.4 Desigualdades

Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de estos símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.

Resolver una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene un infinito de soluciones, que forma un intervalo o una unión de intervalos en la recta real. La siguiente ilustración muestra el modo en que una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

Ecuación: $4x + 7 = 19$

Solución: $x = 3$



Desigualdad $4x + 7 \leq 19$

Solución: $x \leq 3$



Para resolver desigualdades, usamos las reglas siguientes para aislar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa “es equivalente a”). En estas reglas los símbolos A, B, y C representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

REGLAS PARA DESIGUALDADES	
Regla	Descripción
1. $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$	Sumar la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$	Restar la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \leq CB$	Multiplicar cada lado de una desigualdad por la misma cantidad <i>positiva</i> da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \geq CB$	Multiplicar cada lado de una desigualdad por la misma cantidad <i>negativa</i> <i>invierte la dirección</i> de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$	Tomar recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades <i>positivas</i> <i>invierte la dirección</i> de la desigualdad.
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Tomado de Stewart, Redlin, y Watson (2012).

NOTA: la **Regla 4** dice que, si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número negativo, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad:

$3 < 5$ y multiplicamos por 2, obtenemos $6 < 10$ pero si multiplicamos por -2 , obtenemos $-6 > -10$

3.4.1 Desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

Ejemplos	
1. Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.	
$3x < 9x + 4$ $3x - 9x < 9x + 4 - 9x$ $-6x < 4$ $\left(-\frac{1}{6}\right)(-6x) < \left(-\frac{1}{6}\right)(4)$ $x > -\frac{2}{3}$	<i>Desigualdad dada</i> <i>Reste 9x</i> <i>Simplifique</i> <i>Multiplique por $\left(-\frac{1}{6}\right)$ e invierta la desigualdad</i> <i>Simplifique</i>
El conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$ Gráficamente sería: 	

2. Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$

El conjunto solución está formado por todos los valores de x que satisfacen las desigualdades $4 \leq 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Usando las reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$4 \leq 3x - 2 < 13$$

Desigualdad dada

$$6 \leq 3x < 15$$

Sume 2

$$2 \leq x < 5$$

Divida entre 3

Por lo tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$. Gráficamente sería:



3.4.2 Desigualdades NO lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

- Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.
- Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

A continuación, se plantean unos pasos a seguir para resolver este tipo de desigualdades.

Guía para Resolver Desigualdades No Lineales

1. Agrupe todos los términos respecto a x en un lado de la desigualdad.
2. Factorice y simplifique siempre que sea posible.
3. Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. Realice una tabla o diagrama. Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$).

Ejemplos:

1. Resolver la desigualdad cuadrática: $x^2 \leq 5x - 6$

Seguiremos los pasos dados en la guía para resolver desigualdades no lineales:

Paso 1: Pasamos todos los términos al lado izquierdo.

$$\begin{aligned} x^2 &\leq 5x - 6 \\ x^2 - 5x + 6 &\leq 0 \end{aligned}$$

Paso 2: Factorizamos el lado izquierdo de la desigualdad, obtenemos:

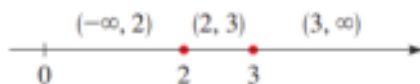
$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Paso 3: Determinamos los ceros de cada factor

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

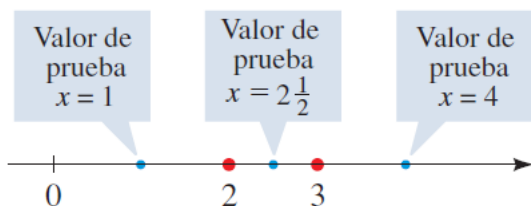
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Paso 4: Como se ve en la figura:



los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$.

Paso 5: Realizamos la tabla o diagrama: Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos, usamos **valores de prueba**. Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el número que escojamos, así como se muestra a continuación:



Escojamos el valor de prueba 1.

Sustituyendo 1 por x en los factores

$x - 2$ y $x - 3$, obtenemos:

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

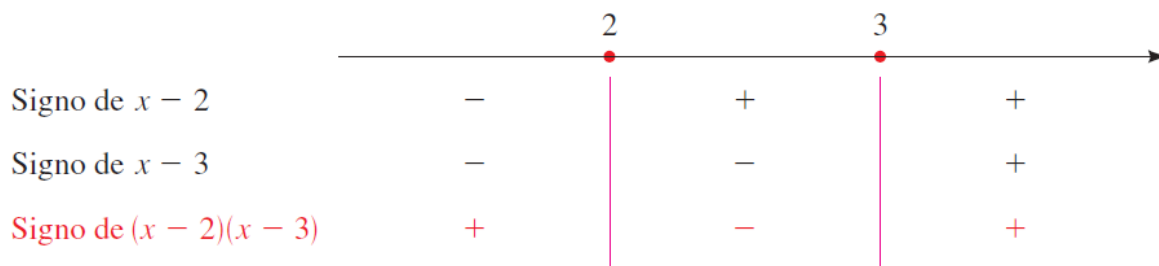
$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Por lo tanto, ambos factores son negativos en este intervalo. Continuamos usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2} = 2,5$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$.

Construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	-	+	+
Signo de $x - 3$	-	-	+
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	+	-	+

El lector puede representar la información en una recta real utilizando un diagrama de signos, donde las rectas verticales marcan los puntos que dividen la recta en intervalos



El diagrama realizado nos proporciona que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Entonces, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leq 0$ es:

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

2. Resolver una desigualdad con factores repetidos

Resuelva la desigualdad $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$

Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por lo tanto, empezamos por hallar los intervalos para esta desigualdad.

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son x , $(x - 1)^2$, $(x - 3)$. Estos son cero cuando $x = 0, 1, 3$. Estos números dividen la recta real en los intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama, usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

	0	1	3
Signo de x	-	+	+
Signo de $(x - 1)^2$	+	+	+
Signo de $(x - 3)$	-	-	+
Signo de $x(x - 1)^2(x - 3)$	+	-	+

Resuelva. Del diagrama vemos que $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$ para x en el intervalo $(0, 1)$ o para x en $(1, 3)$. Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estos dos intervalos: $(0, 1) \cup (1, 3)$.

Gráficamente sería:

3. Resolver una desigualdad racional

Resuelva la desigualdad $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$

Pase todos los términos a un lado. Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1$$

Desigualdad dada

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0$$

Reste 1

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0$$

Denominador común $1 - x$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0$$

Combine las fracciones

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0$$

Simplifique

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $2x$ y $1-x$. Éstos son cero cuando x es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

		0		1	
		○		○	
Signo de $2x$	—		+		+
Signo de $1-x$	+		+		—
Signo de $\frac{2x}{1-x}$	—		+		—

Resuelva. Del diagrama vemos que $\frac{2x}{1-x} \geq 0$ para x en el intervalo $[0, 1)$. Incluimos el punto extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor o *igual* a 1. No obstante, no incluimos el otro punto extremo 1 porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo $[0, 1)$.

Gráficamente sería:

3.4.3 Aplicaciones de desigualdades

A continuación, exploraremos algunos ejemplos de situaciones específicas en las que es necesario aplicar desigualdades y sus métodos de solución.

Ejemplos

1. El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada artículo. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos adicionales (fijos) de \$3000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$1000 a la semana.

Solución: Sea x el número de artículos producidos y vendidos a la semana. Entonces el costo total de producir x unidades es de \$3000 más \$40 por artículo, lo cual es $(40x + 3000)$ dólares.

El ingreso obtenido por vender x unidades a \$60 cada una será de $60x$ dólares. Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &= \text{Ingresos} - \text{Costos} \\ &= 60x - (40x + 3000) = 20x - 3000 \end{aligned}$$

Puesto que deseamos obtener una ganancia de al menos \$1000 a la semana, tenemos las desigualdades siguientes:

$$\text{Utilidad} \geq 1000$$

$$20x - 3000 \geq 1000$$

$$20x \geq 4000$$

$$x \geq 200$$

Respuesta: En consecuencia, el fabricante deberá producir y vender al menos 200 unidades cada semana.

2. El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en \$800 al mes y el costo de material y de mano de obra será de \$0.60 por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Solución Sea x el número de empaques utilizados por la empresa al mes. Entonces, el costo de adquirir x empaques a \$1.10 cada uno es de $1.10x$ dólares. El costo de fabricar x empaques es de \$0.60 por empaque más costos generales de \$800 al mes, de modo que el costo total es:

$$(0.60x + 800) \text{ dólares}$$

Para justificar la fabricación de los empaques por la empresa misma, debe ser cierta la desigualdad siguiente:

$$\text{Costo de adquisición} > \text{Costo de fabricación}$$

$$1.10x > 0.60x + 800$$

$$1.10x - 0.60x > 800$$

$$0.50x > 800$$

$$x > 1600$$

Respuesta: En consecuencia, la empresa debe usar al menos 1601 empaques al mes para justificar su fabricación.

3.5 Sección de ejercicios.

Resuelva la desigualdad. Escriba el conjunto solución en notación de intervalos.

1. $2x - 5 \geq 6x + 7$	2. $-\frac{1}{2} \leq \frac{4-3x}{5} \leq \frac{1}{4}$	3. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$
4. $3x \geq 2x^2 - 5$	5. $x^2 > 3(x + 6)$	6. $x^3 > x$
7. $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$	8. $x^2(x^2 - 1) \geq 0$	9. $\frac{2x+1}{x-5} \leq 3$
10. $1 + \frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{x}$	11. $\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}$	12. $\frac{x}{x+1} > 3x$

13. Una microempresa dedicada a la elaboración de mochilas artesanales vende cada mochila en \$180.000. El costo de producción de cada mochila (materiales y mano de obra) es de \$120.000. Además, la empresa tiene costos fijos semanales de \$4.500.000, correspondientes al arriendo del taller, servicios públicos y gastos administrativos. ¿Cuántas mochilas debe producir y vender en una semana para obtener una utilidad de al menos \$3.000.000?

14. Una empresa de mensajería en Colombia estima que la utilidad semanal obtenida por el servicio de entregas está dada por la función: $U(x) = -5.000x^2 + 1.200.000x - 30.000.000$ donde:

- $U(x)$ es la utilidad semanal (en pesos colombianos).
- x representa el número de cientos de paquetes entregados durante la semana.

La empresa desea obtener una utilidad de al menos \$40.000.000 en una semana. ¿Para qué cantidad de cientos de paquetes debe operar la empresa para alcanzar esa meta?

3.6 Respuestas de los ejercicios

1. $(-\infty, -3]$	2. $\frac{11}{12} \leq x \leq \frac{13}{6}$	3. $(-\infty, -18)$	4. $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$	5. $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$
6. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$	7. $(-\infty, -2) \cup (-2, 4)$	8. $(-\infty, -1] \cup x = 0 \cup [1, \infty)$	9. $(-\infty, 5) \cup [16, \infty)$	10. $[-2, -1) \cup (0, 1]$
11. $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$	12. $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$			

13. La empresa debe producir y vender 125 mochilas o más para obtener una utilidad de al menos \$3.000.000 semanales.

14. $100 \leq x \leq 140$. Como representa cientos de paquetes, la empresa debe entregar entre: 10.000 paquetes (100 cientos), y 14.000 paquetes (140 cientos), para obtener una utilidad semanal de al menos \$40.000.000.

Bibliografía

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2020). Precalculus: Mathematics for Calculus (6th ed.). Cengage Learning
- Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2008). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía (5.^a ed.). Pearson Educación.