

2. Ecuaciones

2.1 Presentación

La presente guía aborda el estudio de las ecuaciones lineales y cuadráticas, fundamentales para el desarrollo del razonamiento algebraico. En ella se presentan los conceptos básicos, procedimientos de solución y ejercicios resueltos que facilitan la comprensión de cada temática. Además, incluye actividades propuestas para que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos y fortalezca sus habilidades mediante la resolución autónoma de ejercicios. El dominio de estos contenidos constituye una base importante para el aprendizaje de cursos posteriores relacionados con las matemáticas.

2.2 Objetivo general

Desarrollar en el estudiante la capacidad de comprender y resolver ecuaciones lineales y cuadráticas mediante la aplicación de los procedimientos adecuados y la resolución de ejercicios.

2.3 Resultados de aprendizaje

- Identificar las características de las ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Aplicar los procedimientos adecuados para resolver cada tipo de ecuación.
- Resolver ejercicios de ecuaciones lineales y cuadráticas utilizando el método correspondiente.
- Fortalecer el razonamiento matemático mediante la resolución autónoma de problemas.

2.4 Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que solo se verifica para algunos valores reales de una incógnita, generalmente llamada x . Resolver una ecuación consiste en encontrar el valor o los valores de la incógnita que hacen que la igualdad sea verdadera. Dichos valores reciben el nombre de soluciones o raíces de la ecuación.

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD	
Propiedad	Descripción
1. $A = B \leftrightarrow A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da como resultado una ecuación equivalente.
2. $A = B \leftrightarrow CA = CB \ (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da como resultado una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos “*sume -7*” al resolver una ecuación, es una forma breve de decir “*sume -7 a cada lado de la ecuación*”.

2.4.1 Ecuaciones Lineales

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma: $ax + b = 0$, donde a y b son números reales con $a \neq 0$ y x es la variable.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

1. $7x - 4 = 3x + 8$

Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$$\begin{aligned}
 7x - 4 &= 3x + 8 \\
 (7x - 4) + 4 &= (3x + 8) + 4 \\
 7x &= 3x + 12 \\
 7x - 3x &= (3x + 12) - 3x \\
 4x &= 12 \\
 \frac{1}{4} \cdot 4x &= \frac{1}{4} \cdot 12 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

Ecuación dada
 Sume 4
 Simplifique
 Reste 3x
 Simplifique
 Multiplique por $\frac{1}{4}$
 Simplifique

2. $3x - 4(6 - x) = 15 - 6x$

Efectuando las operaciones indicadas por los paréntesis obtenemos:

$$3x - 24 + 4x = 15 - 6x$$

Pasamos todos los términos que contienen a la variable al lado izquierdo y las constantes al derecho, no olvidando cambiar sus signos:

$$\begin{aligned}
 3x + 4x + 6x &= 15 + 24 \\
 13x &= 39
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{39}{13} = 3$$

3. $\frac{5x}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{2x-1}{3} \right)$

Después de eliminar los paréntesis, podemos escribir la ecuación dada como:

$$\frac{5x}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{9}{4} - \frac{x}{2} + \frac{2x-1}{6}$$

Con el objeto de eliminar las fracciones, multiplicamos ambos miembros por 12, el denominador común (MCM) y simplificamos:

$$12 \left(\frac{5x}{3} \right) - 12 \left(\frac{x-2}{4} \right) = 12 \left(\frac{9}{4} \right) - 12 \left(\frac{x}{2} \right) + 12 \left(\frac{2x-1}{6} \right)$$

$$4(5x) - 3(x-2) = 3(9) - 6x + 2(2x-1)$$

$$20x - 3x + 6 = 27 - 6x + 4x - 2$$

Pasando los términos en x al lado izquierdo y las constantes al derecho, tenemos que:

$$20x - 3x + 6x - 4x = 27 - 2 - 6$$

$$19x = 19$$

$$x = \frac{19}{19} = 1$$

2.4.2 Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Existen tres métodos para resolver una ecuación de ese tipo: factorizando, usando la fórmula cuadrática y completando el cuadrado.

FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina **discriminante** de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y está dada por el símbolo ***D***.

EL DISCRIMINANTE

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejemplos:

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA POR FACTORIZACIÓN

1. Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$

Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

Factorizamos:

$$(x - 3)(x + 8) = 0$$

Iguamos cada factor a cero:

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -8$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$

2. Resuelva la ecuación $6x^2 + 7x + 1 = 0$

La ecuación ya está igualada a cero (es lo primero que debemos verificar). Procedemos a factorizar:

$$6x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$6x^2 + 6x + x + 1 = 0$$

$$(6x^2 + 6x) + (x + 1) = 0$$

Factor común en cada grupo:

$$6x(x + 1) + (x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(6x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 6x + 1 = 0$$

$$x = -1 \quad \quad \quad x = -\frac{1}{6}$$

De aquí, las raíces son $x = -1$ y $x = -\frac{1}{6}$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA POR FÓRMULA CUADRÁTICA

3. Resuelva la ecuación $3x^2 - 5x - 1 = 0$

En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Las soluciones son: $x = \frac{5+\sqrt{37}}{6} \approx 1.8471$ y $x = \frac{5-\sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA COMPLETANDO CUADRADOS

Recuerde: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

4. Resolver la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$ completando cuadrados.

Se completa cuadrados de modo que se obtenga un trinomio cuadrado perfecto. Para ello se procede de la siguiente manera:

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$x^2 - 6x + (-3)^2 + 7 = 0 + (-3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 9 - 7$$

$$(x - 3)^2 = 2$$

$$\sqrt{(x - 3)^2} = \sqrt{2}$$

$$|x - 3| = \sqrt{2}$$

$$x - 3 = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x - 3 = \sqrt{2}$$

$$x = 3 - \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 3 + \sqrt{2}$$

Ecuación dada. Observe que $2bx = -6x$, $b = -3$

Sumando $b^2 = (-3)^2$ en ambos lados.

Sumando -7 en ambos lados

Trinomio cuadrado perfecto.

Extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|z| = a \text{ si y solo si } z = -a \vee z = a, a > 0$$

El conjunto solución es $\{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$

2.4.3 Aplicaciones de Ecuaciones

1. Una vendedora gana un salario base de \$600 por mes más una comisión del 10% de las ventas que haga. Descubre que en promedio, le toma $1\frac{1}{2}$ horas realizar ventas por un valor de \$100. ¿Cuántas horas deberá trabajar en promedio cada mes para que sus ingresos sean de \$2000?

Solución

Supóngase que trabaja x horas por mes. Cada $1\frac{1}{2}$ hora, efectúa ventas por \$100, de modo que cada hora promedia dos terceras partes, es decir, $\$(200/3)$ en ventas. Su comisión es del 10% de esto, de modo que su comisión promedio por hora es $\frac{20}{3}$. Por lo tanto, en x horas ganará una comisión de $\left(\frac{20}{3}\right)x$ dólares.

Agregando su salario base, obtenemos un ingreso mensual total de $600 + \left(\frac{20}{3}\right)x$. Esto debe ser igual a 2000, de modo que obtenemos la ecuación:

$$600 + \frac{20}{3}x = 2000 \quad \text{Resolviéndola obtenemos las ecuaciones siguientes:}$$

$$\frac{20}{3}x = 2000 - 600 = 1400$$

$$x = \frac{3}{20}(1400) = 210$$

Respuesta: La vendedora deberá trabajar 210 horas por mes, en promedio, si desea alcanzar el nivel de ingreso deseado.

2. Steve es propietario de un edificio de apartamentos que tiene 60 habitaciones. Él puede alquilar todas las habitaciones si fija un alquiler de \$180 mensuales. Al subir el alquiler, algunas de las habitaciones quedarán vacías; en promedio, por cada incremento de \$5 en el alquiler, 1 habitación quedará vacante sin posibilidad alguna de alquilarse. Encuentre el alquiler que debería cobrar por cada habitación para obtener un ingreso total de \$11.475.

Solución

Denótese con n el número de incrementos de \$5 dólares. Entonces, el aumento en el alquiler por habitación es de $5n$ dólares, lo cual significa que el alquiler por habitación es de $(180 + 5n)$ dólares. Así, el número de habitaciones no alquiladas será n , de modo que el número de las alquiladas será $60 - n$. El total de alquiler que recibirá es igual a:

Ingreso total de alquiler = (alquiler por habitación) $\times$ (Número de habitaciones alquiladas)

Por tanto,

$$11.475 = (180 + 5n)(60 - n)$$

Por tanto,

$$11.475 = 5(36 + n)(60 - n)$$

$$n^2 - 24n + 135 = 0$$

Dividiendo ambos miembros entre 5:

$$(n - 9)(n - 15) = 0$$

$$2295 = (36 + n)(60 - n) = 2160 + 24n - n^2$$

$$\text{Así, } n = 9 \text{ ó } n = 15$$

Por consiguiente, el alquiler debe ser $180 + 5n$, que es $180 + 45 = \$225$ ó $180 + 75 = \$255$. En el primer caso, 9 de las habitaciones quedarán vacantes y 51 alquiladas, que producirán un ingreso de \$225 cada una. En el segundo caso, en el que el alquiler es \$255, 15 habitaciones quedarán vacantes y sólo 45 alquiladas, pero la ganancia total será la misma.

2.5 Sección de ejercicios.

Determinar la solución de las siguientes ecuaciones.

1. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = x - \frac{1}{3}$	2. $4(1 - x) = x - 3(x + 1)$	3. $4 - \frac{1}{t} = 3 + \frac{3}{t}$
4. $\frac{4}{r+1} - 5 = 4 - \frac{3}{r+1}$	5. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$	6. $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y+1}{4}$
7. $4x^2 + 10x - 24 = 0$	8. $16x^2 + 9 = 24x$	9. $(3x + 2)^2 = 10$
10. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{1}{3}$	11. $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$	12. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x-6}$

13. Un comerciante de ganado compró 1000 reses a \$150 cada una. Vendió 400 de ellas obteniendo una ganancia del 25%. ¿A qué precio deberá vender las restantes 600 si la utilidad promedio del lote completo debe ser del 30%?

14. La contaminación del aire en CO de la ciudad de Medellín ha estado aumentando constantemente en los últimos años. Se sabe que la cantidad de contaminantes es un día típico sigue el modelo matemático

$C(t) = 3t^2 + 5t + 10$ partes por millón (ppm), donde t es el tiempo en días. Determine cuándo la contaminación alcanzará un nivel crítico de 500 ppm.

2.6 Respuestas de los ejercicios

1. $\{5\}$	2. $\left\{\frac{7}{2}\right\}$	3. $\{4\}$	4. $\left\{-\frac{2}{9}\right\}$	5. $\left\{\frac{4}{3}\right\}$	6. $\left\{\frac{21}{11}\right\}$
7. $\left\{-4, \frac{3}{2}\right\}$	8. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$	9. $\left\{\frac{\sqrt{10}-2}{3}, \frac{-\sqrt{10}-2}{3}\right\}$	10. $\{4\}$	11. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$	12. $\{7\}$
13. El comerciante debe vender las restantes reses a \$200 cada una para lograr una ganancia del 30%.			14. La contaminación alcanzará el valor de 500 ppm en 11 días y 23 horas.		

Bibliografía

- Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2008). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía* (5.ª ed.). Pearson Educación.
- Baldor, A. (2015). *Álgebra de Baldor* (8.ª reimp.). Grupo Editorial Patria.
- Jiménez Gallego, M., Cardona García, F. J., & Díaz Llano, A. (2023). *Guía para el curso de Matemáticas Fundamentales*. Editorial UTP.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (6.ª ed.). Cengage Learning.

Uzuriaga López, V. L., Martínez Acosta, A., & Palacio Loaiza, L. E. (2025). *Matemática básica para la gestión ambiental: Libro de trabajo y herramientas didácticas*. Ediciones de la U.