

1. Factorización

1.1 Presentación

La presente guía tiene como propósito introducir al estudiante en el estudio de la factorización como una herramienta fundamental del álgebra. En ella se desarrollan los principales casos de factorización, acompañados de la fundamentación teórica necesaria para su comprensión. Asimismo, se incluyen ejercicios resueltos que ejemplifican la aplicación de cada procedimiento y facilitan el aprendizaje de los conceptos. Finalmente, se proponen actividades para que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos, fortalezca sus habilidades de razonamiento y consolide el dominio de la temática mediante la resolución autónoma de los ejercicios.

1.2 Objetivo general

Desarrollar en el estudiante la capacidad de identificar, comprender y aplicar los diferentes casos de factorización mediante el estudio de sus fundamentos teóricos y la resolución de ejercicios, fortaleciendo el razonamiento algebraico y las habilidades para la solución de problemas.

1.3 Resultados de aprendizaje

- Identificar los diferentes casos de factorización en expresiones algebraicas.
- Aplicar los métodos de factorización para simplificar y resolver expresiones algebraicas.
- Resolver ejercicios utilizando el caso de factorización adecuado.
- Fortalecer el razonamiento algebraico mediante la práctica y la resolución de problemas.

1.4 Factorización

La **factorización** es un procedimiento algebraico que consiste en descomponer una expresión algebraica en el producto de dos o más factores. Su objetivo es simplificar expresiones y facilitar la resolución de ecuaciones y otros problemas matemáticos.

A continuación estudiaremos los diferentes casos de factorización:

1.4.1 Factor Común

Este caso de factorización se presenta cuando todos los términos de una expresión algebraica tienen un factor común. En este procedimiento, dicho factor se extrae para escribir la expresión como el producto del factor común por la suma o diferencia de los términos restantes, aplicando la propiedad distributiva de números reales, así:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $10b - 30ab^2$

- Identificamos el máximo común divisor de los coeficientes de los términos, que en este caso es $MCD(10,30) = 10$
- Luego, identificamos las variables que se repiten en ambos términos y tomamos la de menor exponente. En este caso, la variable común es b , cuya menor potencia es $b^1 = b$
- Por lo tanto, el factor común es: $10b$.
- Ahora dividimos cada término de la expresión entre el factor común: $\frac{10b}{10b} = 1$; $\frac{-30ab^2}{10b} = -3ab$

- Finalmente, la factorización corresponde al producto del factor común por los términos obtenidos en las divisiones:

$$10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$$

2. $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$

- $MCD(18, 36, 54) = 18$
- Variables repetidas con su menor potencia: my^2
- Factor común: $18my^2$
- Dividimos: $\frac{18mxy^2}{18my^2} = x$; $\frac{-54m^2x^2y^2}{18my^2} = -3mx^2$; $\frac{36my^2}{18my^2} = 2$
- Finalmente: $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2)$

3. Factor común con paréntesis: Caso Especial

- $a(x + y) + b(x + y)$
El factor común es el término que está en paréntesis: $(x + y)$
Por lo tanto, la factorización de: $a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$
- $4x^2(2x - 5)^2 + 8x^2(2x - 5)$
El factor común es: $4x^2(2x - 5)$.
Dividimos cada término entre el factor común: $\frac{4x^2(2x-5)^2}{4x^2(2x-5)} = 2x - 5$; $\frac{8x^2(2x-5)}{4x^2(2x-5)} = 2$
Finalmente: $4x^2(2x - 5)^2 + 8x^2(2x - 5) = 4x^2(2x - 5)(2x - 5 + 2)$
 $= 4x^2(2x - 5)(2x - 3)$

1.4.2 Factor Común por Agrupación de Términos

La **factorización por agrupación de términos** se aplica cuando un polinomio puede dividirse en grupos que poseen un factor común. Se factoriza cada grupo por separado y, si ambos conservan un mismo binomio o expresión, este se extrae como factor común. Generalmente, este método se utiliza en polinomios de cuatro o más términos agrupados de forma conveniente para obtener una factorización completa.

Ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$

Todos los términos no tienen un factor común. Sin embargo, los dos primeros términos tienen el factor común $3m$ y los dos últimos el factor común 4 . Agrupando, tenemos:

$$\begin{aligned} 3m^2 - 6mn + 4m - 8n &= (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n) \\ &= 3m(m - 2n) + 4(m - 2n) \\ &= (m - 2n)(3m + 4) \end{aligned}$$

2. $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$

Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos el factor común 2 , luego los agrupamos pero introducimos los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo $-$ porque el signo del 3^{er} término es $-$, para lo cual hay que cambiarles el signo y tendremos:

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 3xy - 4x + 6y &= (2x^2 - 3xy) - (4x - 6y) \\
 &= x(2x - 3y) - 2(2x - 3y) \\
 &= (2x - 3y)(x - 2)
 \end{aligned}$$

1.4.3 Trinomio Cuadrado Perfecto

La expresión que tiene la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$ se conoce como un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

REGLA PARA CONOCER SI UN TRINOMIO ES CUADRADO PERFECTO

Un trinomio ordenado en relación con una letra es cuadrado perfecto cuando el primer y tercer término son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Así, $a^2 + 4ab + 4b^2$ es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de a^2 a

Raíz cuadrada de $4b^2$ $2b$

Doble producto de estas raíces: $2 \times a \times 2b = 4ab$, segundo término.

Como el trinomio es cuadrado perfecto, su factorización es igual al cuadrado de la suma (o diferencia cuando corresponda) de las raíces cuadradas del primer y tercer término, así: $(a + 2b)^2$.

$36x^2 - 18xy^4 + 4y^8$, NO es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de $36x^2$ $6x$

Raíz cuadrada de $4y^8$ $2y^4$

Doble producto de estas raíces: $2 \times 6x \times 2y^4 = 24xy^4$, que NO es el segundo término.

Ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

$$1. \underset{m}{m^2} + \underset{1}{2m} + 1 = (m + 1)^2$$

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (\underset{2x}{2x} - \underset{5y}{5y})^2$$

$$2. 4x^2 + 25y^2 - 20xy$$

$$3. \underset{1}{1} - \underset{8ax^2}{16ax^2} + \underset{8ax^2}{64a^2x^4} = (1 - 8ax^2)^2$$

Ordenando el trinomio, tenemos:

$$4. \frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$$

Es cuadrado perfecto porque: raíz cuadrada de $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; raíz cuadrada de $\frac{b^2}{9} = \frac{b}{3}$

$$\text{Luego: } 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{b}{3} = \frac{b}{3}$$

Por lo tanto, la factorización es:

$$\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2$$

1.4.4 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Este caso se aplica a trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, donde el coeficiente numérico de x^2 es 1.

REGLA PRÁCTICA PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

1. El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es x , o sea la raíz cuadrada del primer término del trinomio.
2. En el primer factor, después de x se escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo factor, después de x se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio.
3. Si los dos factores binomios tienen en el medio **signos iguales** se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. Estos números son los segundos términos de los binomios.
4. Si los dos factores binomios tienen en el medio **signos distintos** se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El **mayor** de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menor, el segundo término del segundo binomio.

Ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

2. $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

3. $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

4. $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$

5. $a^4 - 5a^2 - 50 = (a^2 - 10)(a^2 + 5)$

6. $x^2 - 5ax - 36a^2 = (x - 9a)(x + 4a)$

7. $(a + b)^2 - 12(a + b) + 20 =$

$= [(a + b) - 10][(a + b) - 2]$

$= (a + b - 10)(a + b - 2)$

1.4.5 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Este caso de factorización se aplica a trinomios donde el coeficiente de x^2 es diferente de 1.

Ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $6x^2 + 11x + 3$

- Identificar los coeficientes del trinomio: $a = 6$; $b = 11$; $c = 3$
- Encontrar dos números que multiplicados den como resultado $ac(18)$ y que sumados den $b(11)$. Los números que multiplican a 18 y suman 11 son +9 y +2.
- Expresar el término del medio (bx) como la suma de los dos números encontrados. Reescribimos $6x^2 + 11x + 3$ como $6x^2 + 9x + 2x + 3$
- Agrupar los términos en pares para facilitar la factorización y factorizar cada grupo:
 $6x^2 + 9x + 2x + 3 = (6x^2 + 9x) + (2x + 3)$
 $= 3x(2x + 3) + 1(2x + 3)$
- Identificar el factor común en ambos términos y factorizarlo: $(2x + 3)(3x + 1)$
- En resumen, la factorización de $6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$

2. $20x^2 + 7x - 6$

$ac = (20)(6) = 120$. Los números que multiplican a **120** y suman **7** son **+15** (El signo **+** sale del segundo término del trinomio) y **-8** (El signo **-** resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio).

$$\begin{aligned} 20x^2 + 7x - 6 &= 20x^2 + 15x - 8x - 6 \\ &= (20x^2 + 15x) - (8x + 6) \\ &= 5x(4x + 3) - 2(4x + 3) \\ &= (4x + 3)(5x - 2) \end{aligned}$$

1.4.6 Diferencia de Cuadrados

La diferencia de cuadrados se puede factorizar utilizando la siguiente fórmula:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

REGLA PARA FACTORIZAR UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $16x^2 - 25y^4$

La raíz cuadrada de $16x^2$ es $4x$; la raíz cuadrada de $25y^4$ es $5y^2$.

Multiplico la suma de estas raíces $(4x + 5y^2)$ por su diferencia $(4x - 5y^2)$ y tendremos:

$$16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$$

$$2. \quad \begin{matrix} 49x^2y^6z^{10} & - & a^{12} \\ 7xy^3z^5 & & a^6 \end{matrix} = (7xy^3z^5 + a^6)(7xy^3z^5 - a^6)$$

$$3. \quad a^{2n} - 9b^{4m} = (a^n + 3b^{2m})(a^n - 3b^{2m})$$

CASO ESPECIAL

$$\begin{aligned} 4. \quad 9x^2 - (x + y)^2 &= [3x + (x + y)][3x - (x + y)] \\ &= (3x + x + y)(3x - x - y) \\ &= (4x + y)(2x - y) \end{aligned}$$

1.4.7 Suma o Diferencia de Cubos

La **suma o diferencia de cubos** es un caso de factorización que se aplica cuando un polinomio tiene **dos términos** y ambos son **cubos perfectos**.

La forma general es:

- **Suma de cubos:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- **Diferencia de cubos:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

¿Cómo reconocer este caso de factorización?

1. Verifica que el polinomio tenga solo dos términos	3. Extrae la raíz cúbica de cada término
2. Comprueba que cada término sea un cubo perfecto	4. Aplica la fórmula correspondiente

Ejemplos: Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $x^3 + 1$

La raíz cúbica de x^3 es x ; la raíz cúbica de 1 es 1. Aplicando la fórmula correspondiente nos queda:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x(1) + 1^2) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

2. $8x^3 - 125 = (2x - 5)[(2x)^2 + 5(2x) + 5^2] = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$

3. $27m^6 + 64n^9 = (3m^2 + 4n^3)[(3m^2)^2 - 3m^2(4n^3) + (4n^3)^2]$
 $= (3m^2 + 4n^3)(9m^4 - 12m^2n^3 + 16n^6)$

1.5 Sección de ejercicios. Para los siguiente polinomios factorice según sea el método.

1. $3a + 6b$	2. $4xy - 6yz$	3. $2u + av - 2v - au$
4. $6xz - 16y - 24x + 4yz$	5. $x^4 - 16y^4$	6. $3t^2 - 108a^2$
7. $x^2 + 5x + 6$	8. $5y^4 + 25y^3 - 70y^2$	9. $2x^2 + 5x + 3$
10. $6t^3 - 7t^2 - 20t$	11. $x^3y - 25xy^3$	12. $9t^2 - 12t + 4$
13. $27u^3 + 8v^3$	14. $x^2y^2 - 9y^2 - 4x^2 + 36$	15. $a^3 + (b + 2)^3$

1.6 Respuestas de los ejercicios

1. $3(a + 2b)$	2. $2y(2x - 3z)$	3. $(2 - a)(u - v)$
3. $2(3x + 2y)(z - 4)$	4. $(x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2)$	5. $3(t - 6a)(t + 6a)$
6. $(x + 2)(x + 3)$	7. $5y^2(y + 7)(y - 2)$	8. $(2x + 3)(x + 1)$
9. $t(2t - 5)(3t + 4)$	10. $xy(x - 5y)(x + 5y)$	11. $(3t - 2)^2$
12. $(3u + 2v)(9u^2 - 6uv + 4v^2)$	13. $(x - 3)(x + 3)(y - 2)(y + 2)$	14. $(a + b + 2)(a^2 - ab - 2a + b^2 + 4b + 4)$

Bibliografía

- Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2008). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía* (5.^a ed.). Pearson Educación.
- Baldor, A. (2015). *Álgebra*. Grupo Editorial Patria.
- Jiménez Gallego, M., Cardona García, F. J., & Díaz Llano, A. (2023). *Guía para el curso de matemáticas fundamentales*. Editorial Universidad Tecnológica de Pereira.
<https://doi.org/10.22517/9789587228892>