

1 Trigonometría

1.1 Presentación

Este capítulo introduce los conceptos básicos de la trigonometría necesarios para el estudio del cálculo diferencial. Se abordan las razones trigonométricas, la medida de ángulos en grados y radianes, la circunferencia unitaria, los valores notables y las identidades fundamentales.

1.2 Objetivo general

Fortalecer el manejo de las razones e identidades trigonométricas básicas como herramientas previas para comprender límites, derivadas y aplicaciones del cálculo diferencial.

1.3 Resultados de aprendizaje

- Calcular razones trigonométricas en triángulos rectángulos utilizando seno, coseno y tangente, fortaleciendo los conocimientos previos necesarios para el estudio del cálculo diferencial.
- Interpretar la circunferencia unitaria y los valores trigonométricos notables, relacionando ángulos en grados y radianes con las razones trigonométricas fundamentales.
- Demostrar identidades trigonométricas fundamentales mediante procesos de simplificación, conversión de unidades angulares y uso de relaciones pitagóricas.

1.4 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

En este capítulo se estudia principalmente a partir del triángulo rectángulo, ya que en él se definen las razones trigonométricas básicas. En un triángulo rectángulo se identifican tres lados principales:

- **Hipotenusa:** Es el lado más largo del triángulo y siempre está frente al ángulo recto.
- **Cateto opuesto:** Es el lado que queda frente al ángulo que se está analizando.
- **Cateto adyacente:** Es el lado que está junto al ángulo que se está analizando, pero que no es la hipotenusa.

A partir de estos lados se definen las razones trigonométricas principales: seno, coseno y tangente.

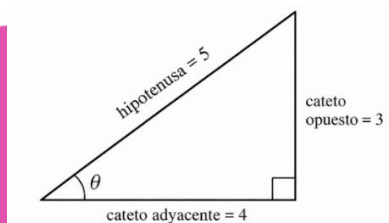
$$\sin \theta = \frac{co}{h}, \quad \cos \theta = \frac{ca}{h}, \quad \tan \theta = \frac{co}{ca}.$$

Donde, co es el cateto opuesto, ca es el cateto adyacente y h es la hipotenusa; las razones trigonométricas son fundamentales porque permiten encontrar lados o ángulos desconocidos en un triángulo rectángulo.

Ejemplo: Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo donde, respecto al ángulo θ , el cateto opuesto mide 3, el cateto adyacente mide 4 y la hipotenusa mide 5.

Figura 1

Triángulo rectángulo con catetos e hipotenusa



Con los datos conocidos se plantean las tres razones trigonométricas con los datos conocidos: $\sin \theta = \frac{3}{5}$; $\cos \theta = \frac{4}{5}$; $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Uno de los errores más frecuentes es confundir el cateto opuesto con el cateto adyacente. Para evitarlo, siempre se debe mirar primero cuál es el

ángulo de referencia. El cateto opuesto cambia dependiendo del ángulo que se esté analizando.

1.5 Medida de ángulos (grados y radianes)

Los ángulos se pueden medir principalmente de dos formas: en grados y en radianes. Los grados son la medida más conocida. Por ejemplo: 30° , 45° , 60° y 90° . Sin embargo, en cálculo y en otras áreas de las matemáticas se usa con mayor frecuencia en radianes. La relación principal entre grados y radianes es:

$$180^\circ = \pi \text{ radianes}, \text{ y la fórmula de conversión es } \text{grados a radianes} = \text{grados} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

A partir de esta equivalencia podemos convertir grados a radianes.

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}; 45^\circ = \frac{\pi}{4}; 60^\circ = \frac{\pi}{3}; 90^\circ = \frac{\pi}{2}; 180^\circ = \pi.$$

¿Importancia de los radianes? Los radianes son importantes porque muchas fórmulas de cálculo funcionan correctamente cuando los ángulos están expresados en radianes. Por ejemplo, en límites trigonométricos y derivadas de funciones trigonométricas, se trabaja normalmente en radianes.

1.6 Circunferencia unitaria y valores trigonométricos notables

La circunferencia unitaria es aquella con radio de magnitud 1 que puede estar ubicada en el plano cartesiano, con centro en el origen (0,0). Su ecuación está dada por $x^2 + y^2 = 1$. Esta circunferencia permite comprender mejor las funciones trigonométricas, porque cada punto sobre ella se puede relacionar con un ángulo de la siguiente manera:

$$(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Para un ángulo θ , el punto correspondiente en la circunferencia unitaria tiene coordenadas; el coseno representa la coordenada en x, mientras que el seno representa la coordenada en y. Los valores trigonométricos notables son aquellos que aparecen con frecuencia y que conviene memorizar.

Tabla 1

Valores trigonométricos notables en grados y radianes

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-

Nota. La tangente se define como $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. Por esta razón, cuando el coseno es cero, la tangente no existe. Por ejemplo, cuando se evalúa en 90° : $\tan(90^\circ) = \frac{1}{0}$ como no se puede dividir entre cero, la tangente de 90° no existe.

1.7 Identidades trigonométricas fundamentales

Una identidad trigonométrica es una igualdad que se cumple para todos los valores permitidos de la variable. Las identidades son importantes porque permiten transformar, simplificar y resolver expresiones trigonométricas. Las primeras identidades que se deben conocer son las identidades recíprocas:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Estas fórmulas son útiles porque permiten expresar unas funciones trigonométricas en términos de otras.

Ejemplo: Simplificar la expresión $\tan x \cdot \cos x$.

Sabemos que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, entonces sustituimos en la expresión y se obtiene que:

$$\tan x \cdot \cos x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \cdot \cos x$$

Se simplifica $\cos x$ y por lo tanto $\tan x \cdot \cos x = \sin x$.

Un error frecuente es intentar cancelar términos que están sumando o restando. Solo se pueden cancelar factores cuando están multiplicando o dividiendo.

Por ejemplo, en la siguiente expresión no se puede cancelar directamente $\cos(x)$ del numerador con el denominador, porque en el numerador hay una suma $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)}$.

También se tienen las identidades pitagóricas que son las más importantes en trigonometría. Se derivan de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, fundamentadas en $x = \cos \theta$ y $y = \sin \theta$, entonces $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

A partir de la identidad fundamental $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se pueden obtener otras identidades. Si dividimos toda la expresión entre $\cos^2 \theta$, $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ entonces:

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

De forma similar, al dividir la identidad fundamental entre $\sin^2 \theta$, se obtiene:

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

Estas identidades son muy usadas para simplificar expresiones y resolver ecuaciones trigonométricas.

1.8 Fórmulas de suma, diferencia y ángulo doble

Las fórmulas de suma y diferencia permiten calcular el seno, coseno o tangente de la suma o resta de dos ángulos. Las principales ecuaciones son:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$$

Es importante observar que en el caso del seno el signo se conserva, mientras que, en las fórmulas del coseno, el signo cambia.

Ahora bien, las fórmulas de **ángulo doble** permiten expresar funciones trigonométricas de $2x$ en términos de funciones de x , las más usadas son:

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 1 - 2 \sin^2(x) \\ \cos(2x) &= 2 \cos^2(x) - 1\end{aligned}$$

Estas tres formas de $\cos(2x)$ son equivalentes. La elección depende del ejercicio que se esté resolviendo.

Ahora bien, las fórmulas de ángulo medio se usan para expresar funciones cuyo argumento es $\frac{x}{2}$. Algunas de las más usadas son:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

Estas fórmulas aparecen con frecuencia en simplificación trigonométrica y en algunos procesos de cálculo.

1.9 Simplificación de expresiones trigonométricas

Simplificar una expresión trigonométrica significa transformarla en una forma más sencilla, usando identidades conocidas. Para simplificar, se recomienda seguir estos pasos:

- Identificar las funciones trigonométricas presentes.
- Reescribir tangente, cotangente, secante y cosecante en términos de seno y coseno si es necesario.
- Aplicar identidades pitagóricas.
- Cancelar únicamente factores comunes.
- Verificar que la expresión final sea equivalente a la inicial.

Ejemplo: Simplificar la expresión $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$.

Usamos la identidad pitagórica $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, y despejando $\sin^2 x$ se obtiene que: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, después sustituimos en la primera expresión y se obtiene que $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x}$, cancelando $\sin x$:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \sin x.$$

1.10 Ejercicios propuestos

- Identificar seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo donde el cateto opuesto mide 8, el cateto adyacente mide 15 y la hipotenusa mide 17. **Respuesta:** $\sin \theta = \frac{8}{17}$, $\cos \theta = \frac{15}{17}$, $\tan \theta = \frac{8}{15}$.
- Convertir los siguientes ángulos a radianes: 45° , 90° , 135° y 180° . **Respuesta:** $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$, $180^\circ = \pi$.
- Simplificar: $\tan x \cos x$. **Respuesta:** $\sin x$.

La trigonometría es una base fundamental para el estudio del cálculo, especialmente en límites, derivadas y aplicaciones de movimiento. Para avanzar con seguridad, el estudiante debe dominar las razones trigonométricas básicas, los valores notables, la conversión entre grados y radianes, y las identidades fundamentales. Más que memorizar fórmulas, es importante comprender de dónde vienen y cómo se usan.

2 Límites y continuidad

2.1 Presentación

Este capítulo presenta el concepto de límite como una herramienta para estudiar el comportamiento de una función cerca de un punto. Se trabajan límites laterales, propiedades algebraicas, técnicas de cálculo, límites trigonométricos, asíntotas y continuidad.

2.2 Objetivo general

Comprender y calcular límites de funciones mediante métodos algebraicos, numéricos y gráficos, reconociendo su relación con la continuidad y el comportamiento de las funciones.

2.3 Resultados de aprendizaje

- Explicar el comportamiento de aproximación de una función mediante el concepto intuitivo y formal de límite.
- Calcular límites determinados e indeterminados empleando sustitución directa, propiedades algebraicas, factorización, racionalización y límites trigonométricos fundamentales.
- Evaluar la continuidad de funciones mediante el análisis de la existencia del límite, los límites laterales y el valor de la función en un punto.
- Determinar límites infinitos, límites al infinito y asíntotas básicas para describir el comportamiento extremo de una función.

2.4 Introducción al concepto de límite

En cálculo, el límite permite estudiar el comportamiento de una función cuando la variable independiente se acerca a un valor determinado. Lo importante no es necesariamente el valor exacto de la función en ese punto, sino la tendencia que toma la función cerca de él.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Esta expresión se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L . Significa que cuando x se acerca al valor a , los valores de $f(x)$ se acercan al valor L .

Idea clave: El límite mira lo que ocurre alrededor del punto, no obligatoriamente lo que ocurre exactamente en el punto.

Por ejemplo, si una función se acerca al valor 5 cuando x se aproxima a 3, podemos decir que su límite es 5, aunque la función no esté definida exactamente en $x = 3$.

2.5 Definición formal del límite

Se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esta definición expresa de manera rigurosa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse tanto como se desee a L cuando x se aproxima suficientemente a a . En otras palabras, al hacer que x esté lo suficientemente cerca de a , sin ser igual a a , se puede lograr que $f(x)$ esté tan cerca de L como se quiera.

2.6 Interpretación numérica del límite

Una forma sencilla de entender un límite es aproximarse al valor de interés desde ambos lados y observar qué sucede con la función. Esto puede hacerse mediante una tabla de valores o mediante una gráfica. Consideremos la función $f(x) = 2x - 1$, para analizar qué ocurre cuando x se acerca a 3.

Tabla 2

Aproximación numérica al límite de una función

Aproximación por la izquierda	$f(x)$	Aproximación por la derecha	$f(x)$
$x = 2.9$	4.8	$x = 3.1$	5.2
$x = 2.99$	4.98	$x = 3.01$	5.02
$x = 2.999$	4.998	$x = 3.001$	5.002

Al observar la tabla, los valores de la función se acercan a 5 tanto por la izquierda como por la derecha. Por eso se concluye que $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 1 = 5$

Para recordar: Si al aproximarnos por ambos lados la función se acerca al mismo valor, entonces el límite puede existir.

2.7 Límites laterales y existencia del límite

Para estudiar correctamente un límite, muchas veces es necesario analizar qué ocurre cuando x se acerca al punto por la izquierda y por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

representa el límite por la izquierda, es decir, cuando x se aproxima a a tomando valores menores que a .

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

representa el límite por la derecha, es decir, cuando x se aproxima a a tomando valores mayores que a .

La condición de existencia del límite bilateral es:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

Esto quiere decir que el límite general existe únicamente cuando ambos límites laterales existen y tienen el mismo valor. Si los límites laterales son diferentes, el límite no existe.

Error común: Algunos estudiantes evalúan solo por un lado y concluyen que el límite existe. Siempre que haya funciones por partes, valor absoluto o posibles saltos, se deben revisar ambos lados.

2.8 Propiedades algebraicas de los límites

Las propiedades de los límites permiten calcular límites de funciones más complejas a partir de límites más sencillos. Si existen los límites de $f(x)$ y $g(x)$, entonces se pueden aplicar las siguientes propiedades:

Tabla 3

Propiedades algebraicas de los límites

Propiedad	Expresión
Suma o resta	$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
Producto	$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
Cociente	$\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}, \text{ si } \lim g(x) \neq 0$
Potencia	$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
Constante	$\lim k = k$

Estas propiedades son útiles cuando la función no genera indeterminaciones y puede evaluarse directamente. El primer método para calcular un límite es la sustitución directa. Esta consiste en reemplazar la variable por el valor al que tiende, siempre que no aparezca una indeterminación.

Recomendación: Si al sustituir se obtiene un número real definido, ese será el valor del límite. Si aparece $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ u otra forma indeterminada, se debe aplicar otra técnica.

2.9 Límites indeterminados y técnicas de factorización

Una indeterminación ocurre cuando la sustitución directa no permite conocer el valor del límite. Una de las más comunes es $\frac{0}{0}$. Esta forma no significa que el límite no exista. Significa que la expresión debe transformarse para descubrir la verdadera tendencia de la función. Cuando hay polinomios, una técnica muy útil es la factorización.

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$ entonces lo primero es sustituir $x = 3$ y se tiene que $\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ como aparece una indeterminación, factorizamos el numerador usando diferencia de cuadrados, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ y reemplazando la expresión en el límite tenemos que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$. Como en un límite x se acerca a 3 pero no es exactamente 3, podemos cancelar el factor común $x - 3$ y queda el límite $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3)$, ahora sustituimos y nos queda que $3 + 3 = 6$ y se concluye que $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 6$.

Error común: No se debe cancelar antes de factorizar correctamente. Tampoco se debe cancelar si los términos están sumando o restando sin ser factores comunes.

2.10 Límites mediante racionalización

La racionalización se utiliza cuando aparecen raíces y la sustitución directa produce una indeterminación. La idea es multiplicar por el conjugado para eliminar la raíz que impide simplificar. El

conjugado de una expresión como $\sqrt{x} - 1$ es $\sqrt{x} + 1$. Al multiplicarlos se obtiene una diferencia de cuadrados $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$.

Ejemplo. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right)$, primero sustituimos $x = 1$ y nos queda que $\frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$.

Como se obtiene una indeterminación, se multiplica por el conjugado del numerador.

$\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right)$ en el numerador aplicamos diferencia de cuadrados $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$ y cancelamos el factor común $x - 1$ y nos queda el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1},$$

sustituimos el valor de x $\frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}.$$

2.11 Límites con valor absoluto y funciones definidas por partes

Los límites con valor absoluto requieren especial cuidado porque el valor absoluto cambia de expresión dependiendo del signo de lo que está dentro.

$$\begin{aligned} |x| &= x, & \text{si } x &\geq 0 \\ |x| &= -x, & \text{si } x &< 0 \end{aligned}$$

Por esta razón, muchos límites con valor absoluto deben resolverse mediante límites laterales.

Ejemplo. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

Como es una función valor absoluto se analiza por derecha y por izquierda. Por la derecha, cuando $x > 0$, se cumple que $|x| = x$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$.

Ahora analizando por la izquierda, cuando $x < 0$, se cumple que $|x| = -x$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

Como los límites laterales son diferentes, el límite general, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Idea clave: el valor absoluto casi siempre invita a revisar la función por casos.

2.12 Límites mediante cambio de variable

El cambio de variable permite transformar un límite difícil en uno más sencillo. Consiste en reemplazar una expresión por una nueva variable para simplificar la escritura y facilitar el cálculo. Los límites trigonométricos son muy importantes porque aparecen en el estudio de derivadas de funciones trigonométricas y en modelos con comportamiento periódico. Los límites notables más usados son:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

Queremos usar el límite notable $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$, pero en el numerador aparece $\sin(3x)$.

Para que el denominador también tenga $3x$ entonces multiplicamos y dividimos por 3 y se obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{(3x)} \text{ y hacemos el cambio de variable } u = 3x.$$

Si $x \rightarrow 0$, entonces $u \rightarrow 0$, $3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{(u)} = 3 \cdot 1 = 3$ y por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$.

Ejemplo: Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$.

Paso 1. Multiplicamos y dividimos para formar límites notables del tipo $\frac{\sin(u)}{u}$.

$$\frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(5x)}{(5x)} \cdot \frac{(3x)}{\sin(3x)} \cdot \frac{5}{3}$$

Paso 2. Cuando x tiende a 0, $\frac{\sin(5x)}{(5x)}$ tiende a 1 y $\frac{(3x)}{\sin(3x)}$ también tiende a 1, por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \frac{5}{3}.$$

2.13 Teorema del emparedado o de la compresión

El Teorema del Emparedado se usa cuando una función difícil de evaluar queda atrapada entre dos funciones más sencillas que tienen el mismo límite. Si se cumple que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ y, además

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Ejemplo. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sabemos que la función seno siempre está entre -1 y 1 entonces se plantea la desigualdad

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

y multiplicamos todo por x^2 . Como x^2 es positivo, no cambia el sentido de la desigualdad y queda que

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Ahora evaluamos los extremos $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$. Como ambos extremos tienden a 0, la función del centro también tiende a 0 por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2.14 Límites infinitos y límites al infinito

Un límite infinito aparece cuando la función crece o decrece sin límite al acercarse a un valor específico.

Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$. Esto indica que la función se dispara hacia valores muy grandes positivos o negativos cerca de $x = 3$. En cambio, un límite al infinito estudia el

comportamiento de la función cuando x crece o decrece sin límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Estos límites ayudan a analizar el comportamiento lejano de la gráfica.

2.15 Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

Las asíntotas son rectas a las que una función se aproxima. Permiten describir el comportamiento de la gráfica cerca de puntos problemáticos o cuando x se aleja hacia infinito.

Asíntotas verticales: Una recta $x = a$ es una asíntota vertical si la función tiende a infinito positivo o negativo cuando x se aproxima a a por alguno de sus lados. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.

Ejemplo: para $f(x) = \frac{1}{(x-3)}$, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: Una recta $y = L$ es una asíntota horizontal si la función se acerca a L cuando x tiende a infinito o a menos infinito $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Asíntotas oblicuas: Una asíntota oblicua aparece cuando la función se aproxima a una recta inclinada de la forma $y = mx + b$. En funciones racionales, suele aparecer cuando el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador.

Recomendación: las asíntotas deben interpretarse como guías del comportamiento de la función, no como valores exactos que la función necesariamente deba alcanzar.

2.16 Continuidad de funciones

La continuidad es una propiedad que indica que una función no presenta saltos, huecos ni rupturas en un punto. Una función f es continua en $x = a$ si se cumplen tres condiciones:

$$\begin{aligned} &f(a) \text{ está definida} \\ &\text{Existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{aligned}$$

El límite coincide con el valor de la función: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Si alguna de estas condiciones falla, la función no es continua en ese punto.

Ejemplo. Si una función tiene un hueco en $x = 2$, puede ocurrir que el límite exista, pero que $f(2)$ no esté definido. En ese caso, la función no es continua en $x = 2$. Si la función tiene un salto, los límites laterales son diferentes. En ese caso, el límite no existe y la función tampoco es continua.

2.17 Ejercicios propuestos

- | | |
|---|---|
| I. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 1$. R//: 11 | V. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x}$. Respuesta: 6 |
| II. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. R//: 4 | VI. Identificar la asíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$. Respuesta: -2 |
| III. Calcular por racionalización: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$. R//: $\frac{1}{4}$ | VII. Determinar si $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ es continua en $x = 1$. R//: No es continua |
| IV. Analizar si existe: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$. R//: No existe | |

3 Derivadas

3.1 Presentación

Este capítulo introduce la derivada como una herramienta para estudiar el cambio instantáneo de una función. Se explica su interpretación como razón de cambio, pendiente de la recta tangente y límite, además de las reglas básicas de derivación, regla del producto, cociente, cadena, derivadas trigonométricas y derivación implícita.

3.2 Objetivo general

Comprender el concepto de derivada y aplicar reglas de derivación para resolver funciones algebraicas, trigonométricas, compuestas e implícitas.

3.3 Resultados de aprendizaje

- Interpretar el significado geométrico y físico de la derivada a partir de la razón de cambio instantánea, la pendiente de la recta tangente y el límite del cociente diferencial.
- Calcular derivadas de funciones algebraicas y trigonométricas aplicando reglas básicas de derivación, regla del producto, regla del cociente y regla de la cadena.
- Determinar derivadas implícitas utilizando las propiedades operacionales del cálculo diferencial y procedimientos de diferenciación respecto a una variable.

3.4 Introducción al cálculo diferencial

El cálculo diferencial es una parte de las matemáticas que estudia cómo cambian las cantidades. Muchas situaciones de la vida real involucran cambios: un automóvil cambia su velocidad, una población aumenta o disminuye, una empresa modifica sus costos, una temperatura varía con el tiempo. Para estudiar estos cambios aparece uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada.

La derivada permite responder preguntas como:

- ¿Qué tan rápido cambia una cantidad?
- ¿Cuál es la pendiente de una curva en un punto?
- ¿Una función está creciendo o decreciendo?
- ¿En qué punto una función alcanza un máximo o un mínimo?

En términos sencillos, la derivada mide el cambio instantáneo de una función. Es decir, nos dice cómo cambia una función exactamente en un punto.

3.5 La derivada como razón de cambio instantánea

Antes de hablar de razón de cambio instantánea, recordemos la idea de razón de cambio promedio. Si una función $f(x)$ cambia desde un valor $x = a$ hasta otro valor $x = b$, la razón de cambio promedio se calcula como $\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}$, esta expresión indica cuánto cambia la función en promedio dentro de un intervalo.

3.6 La derivada como pendiente de la recta tangente

Otra forma muy importante de entender la derivada es desde la geometría. Cuando observamos una curva, podemos preguntarnos: ¿Cuál es la pendiente de la curva en un punto específico? En una recta, la

pendiente se calcula fácilmente porque la inclinación es constante. Pero en una curva, la inclinación cambia en cada punto. Para resolver este problema, usamos la idea de una recta tangente. La recta tangente es una recta que toca la curva en un punto y representa la inclinación de la curva justo en ese lugar. La derivada en un punto es la pendiente de esa recta tangente.

$$f'(a) = \text{pendiente de la recta tangente en } x = a.$$

3.7 Definición de derivada mediante límites

La derivada se define formalmente usando límites. Esta definición muestra de dónde vienen las reglas de derivación. La derivada de una función $f(x)$ se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Esta expresión se conoce como el cociente de diferencias o cociente de Fermat.

Ejemplo. Hallar la derivada de: $f(x) = x^2$

Usamos la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Primero calculamos:

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

Desarrollamos:

$$f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2$$

Ahora sustituimos en la fórmula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

Cancelamos x^2 con $-x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

Factorizamos h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

Cancelamos h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$$

Finalmente, evaluamos el límite:

$$f'(x) = 2x$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Idea clave: Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto. Sin embargo, una función continua puede no ser derivable en puntos angulosos o en puntos con tangente vertical.

Caso donde una función no es derivable

Punto anguloso: ocurre cuando la gráfica tiene un cambio brusco de dirección. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable allí porque tiene una punta.

Discontinuidad: si una función no es continua en un punto, entonces no puede ser derivable en ese punto.

Tangente vertical: ocurre cuando la pendiente se vuelve infinita o no puede representarse como un número real.

Para que una función sea derivable, debe ser continua, pero además debe tener una pendiente única y bien definida.

3.8 Reglas básicas de derivación

Aunque la derivada puede calcularse usando límites, en la práctica se utilizan reglas que permiten derivar de manera más rápida.

Derivada de una constante: La derivada de una constante es cero, $\frac{d}{dx}(c) = 0$.

Ejemplo: $\frac{d}{dx}(7) = 0$. Esto ocurre porque una constante no cambia.

Regla de la potencia: Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$. Esta es una de las reglas más usadas.

Ejemplo: $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$; $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$; $\frac{d}{dx}(x) = 1$.

3.9 Derivadas de funciones algebraicas

Las funciones algebraicas incluyen polinomios, raíces, fracciones y potencias. Para derivarlas, muchas veces conviene reescribirlas como potencias.

Ejemplo: Derivar $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$

Derivamos término a término $f'(x) = 12x^3 - 10x + 0$ y por lo tanto $f'(x) = 12x^3 - 10x$.

Recomendación para el estudiante: Antes de derivar, revisa si puedes escribir raíces y fracciones como potencias. Esto hace que el procedimiento sea más sencillo.

3.10 Regla del producto y regla del cociente

No todas las funciones se derivan término a término. Cuando aparecen multiplicaciones o divisiones de funciones, se necesitan reglas especiales.

Regla del producto. Si $h(x) = f(x) * g(x)$ entonces $h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$.

En otras palabras: se deriva la primera función y se deja la segunda igual, luego se suma la primera función igual por la derivada de la segunda.

Ejemplo: Derivar $h(x) = x^2 \sin(x)$. Identificamos $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$ y derivamos

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = \cos(x).$$

Aplicamos la regla del producto y obtenemos que

$$h'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x).$$

Ejemplo: Derivar $f(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$

Paso 1. Identificamos un producto:

$$u = x^2 \text{ y } v = \cos(3x). \quad u' = 2x \text{ y } v' = -3\sin(3x).$$

Paso 2. Aplicamos la regla del producto:

$$(uv)' = u'v + uv'. f'(x) = 2x\cos(3x) + x^2[-3\sin(3x)].$$

Por lo tanto

$$f'(x) = 2x\cos(3x) - 3x^2\sin(3x).$$

Regla del cociente. Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$. Esta regla se usa cuando una función está dividida entre otra.

Ejemplo: Derivar $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ entonces identificamos $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$

Derivando cada función $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 1$ y aplicamos la regla del cociente

$$h'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 1)(1)}{x^2}. \text{ Simplificamos } h'(x) = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} \text{ y por lo tanto } h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

3.11 Regla de la cadena

La regla de la cadena se usa cuando una función está dentro de otra función. A esto se le llama función compuesta. Si $h(x) = f(g(x))$ entonces $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

En palabras: se deriva la función externa, se deja la interna igual y luego se multiplica por la derivada de la función interna.

Ejemplo: Derivar $h(x) = (3x + 1)^5$. La función externa es la potencia 5. La función interna es $3x + 1$. Aplicamos la regla de la cadena y obtenemos que $h'(x) = 5(3x + 1)^4(3)$, por lo tanto $h'(x) = 15(3x + 1)^4$.

Error común: Un error frecuente es derivar solo la función externa y olvidar multiplicar por la derivada de la función interna.

3.12 Derivadas de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas también tienen reglas de derivación. Las principales son:

$$\frac{d}{dx} [\sin(x)] = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\cos(x)] = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\tan(x)] = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\cot(x)] = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\sec(x)] = \sec(x) \tan(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\csc(x)] = -\csc(x) \cot(x)$$

Cuando el argumento no es simplemente x , se debe aplicar regla de la cadena.

3.13 Derivación implícita

Hasta ahora hemos trabajado con funciones donde y está despejada, por ejemplo, $y = x^2 + 3x$. Pero hay casos donde x y y aparecen mezcladas en una misma ecuación, como $x^2 + y^2 = 25$. En este caso, y no está despejada. A estas relaciones se les llama funciones implícitas. La derivación implícita permite encontrar $\frac{dy}{dx}$ sin necesidad de despejar y .

Pasos para derivar implícitamente

- Derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x .
- Cada vez que se derive una expresión con y , multiplicar por $\frac{dy}{dx}$.
- Agrupar los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$.
- Factorizar y despejar $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo: Hallar la derivada de $x^2 + y^2 = 25$.

Derivamos ambos lados respecto a x : $\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25$. La derivada de x^2 es $2x$. La derivada de y^2 es $2y \frac{dy}{dx}$. La derivada de 25 es 0. $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ Despejamos $2y \frac{dy}{dx} = -2x$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$

Simplificamos $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ por lo tanto $y' = -\frac{x}{y}$. Esta derivada indica la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en cualquier punto donde y no sea cero.

Ejemplo: Hallar $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación $x^2y + y^2 = 10$

Paso 1. Derivamos respecto a x . En x^2y se usa regla del producto. $\frac{d(x^2y)}{dx} = 2xy + x^2 \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

Paso 2. Sustituimos en la ecuación derivada,

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

Paso 3. Agrupamos los términos con $\frac{dy}{dx}$ y despejamos, $(x^2 + 2y) \frac{dy}{dx} = -2xy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 2y}$$

3.14 Ejercicios propuestos

- | | |
|---|---|
| I. Derivar: $f(x) = 6x^5 - 4x^3$ | V. Derivar usando regla de la cadena: $f(x) = (5x^2 - 4x + 1)^6$ |
| II. Derivar: $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ | VI. Derivar: $f(x) = \cos(3x^2)$ |
| III. Derivar usando regla del producto: $f(x) = x^3 \sin(x)$ | VII. Hallar dy/dx mediante derivación implícita: $x^2 + y^2 = 16$ |
| IV. Derivar usando regla del cociente: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ | VIII. Hallar la segunda derivada de: $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ |

Respuestas: I. $f'(x) = 30x^4 - 12x^2 + 2$ II. $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) + 3x^2$ III. $f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$ IV. $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)/(x - 1)^2$ V. $f'(x) = 6(10x - 4)(5x^2 - 4x + 1)^5$ VI. $f'(x) = -6x \sin(3x^2)$ VII. $dy/dx = -x/y$ VIII. $f''(x) = 20x^3 - 12x$.

La derivada permite estudiar el cambio de una función. Para resolver ejercicios, se debe identificar la regla adecuada y aplicar el procedimiento con orden.

4 Aplicaciones de la derivada

4.1 Presentación

Este capítulo muestra cómo se utiliza la derivada para analizar el comportamiento de funciones y resolver problemas aplicados. Se estudian crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, máximos, mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, optimización, razones de cambio, velocidad y aceleración.

4.2 Objetivo general

Aplicar la derivada para analizar funciones, clasificar extremos, estudiar concavidad y resolver problemas de optimización y razón de cambio.

4.3 Resultados de aprendizaje

- Identificar intervalos de crecimiento, decrecimiento y puntos críticos de una función aplicando el criterio de la primera derivada.
- Determinar máximos, mínimos, concavidad y puntos de inflexión mediante el uso de la primera y segunda derivada.
- Resolver problemas de optimización y razones de cambio relacionadas mediante la formulación de modelos matemáticos basados en derivadas.
- Esbozar la gráfica completa de una función integrando dominio, puntos críticos, crecimiento, decrecimiento, concavidad, asíntotas y criterios de derivación.

4.4 Análisis del crecimiento y decrecimiento de funciones

Una de las primeras aplicaciones de la derivada es determinar si una función sube o baja en un intervalo, esto ayuda a comprender el comportamiento de la gráfica sin depender únicamente de un dibujo. Si $f'(x) > 0$, la función crece.

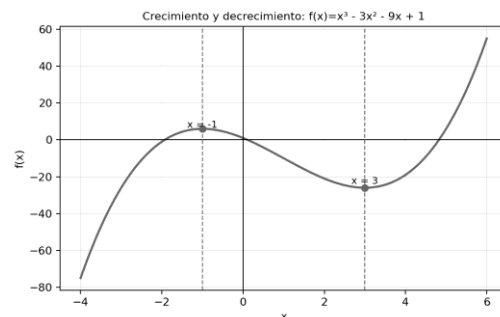
- Si $f'(x) < 0$, la función decrece.
- Calcular la derivada $f'(x)$.
- Encontrar los valores donde $f'(x) = 0$ o donde no existe.
- Dividir el dominio en intervalos.
- Probar el signo de $f'(x)$ en cada intervalo.
- Concluir dónde la función crece o decrece.

Ejemplo:

Para $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, se obtiene $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Al resolver $f'(x) = 0$ se obtiene $x = -1$ y $x = 3$. La función crece en $(-\infty, -1)$, decrece en $(-1, 3)$ y vuelve a crecer en $(3, \infty)$.

Figura 2

Comportamiento creciente y decreciente de una función



4.5 Puntos críticos de una función

Los puntos críticos son valores de la variable independiente donde puede cambiar el comportamiento de una función. Aparecen cuando la derivada se anula o cuando la derivada no existe.

Puntos críticos: $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

No todo punto crítico es automáticamente un máximo o un mínimo. Por eso, después de encontrarlos, se debe analizar el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha.

Idea clave: Los puntos críticos son candidatos. Para decidir si realmente corresponden a máximos, mínimos o puntos especiales, se aplican criterios de la primera o segunda derivada.

4.6 Máximos y mínimos relativos y absolutos

Un máximo o mínimo representa un valor extremo de la función. Puede ser relativo, si se compara solo con puntos cercanos, o absoluto, si se compara con todo el dominio considerado.

Tabla 4
Clasificación de máximos y mínimos de una función

Tipo	Interpretación
Máximo relativo	La función alcanza un valor mayor que los valores cercanos.
Mínimo relativo	La función alcanza un valor menor que los valores cercanos.
Máximo absoluto	Es el valor más alto de toda la función en el dominio.
Mínimo absoluto	Es el valor más bajo de toda la función en el dominio.

Ejemplo: si $f(x) = x^2 - 4x$, entonces $f'(x) = 2x - 4$. Al resolver $2x - 4 = 0$ se obtiene $x = 2$.

Como la parábola abre hacia arriba, en $x = 2$ hay un mínimo.

4.7 Criterio de la primera derivada

El criterio de la primera derivada clasifica los puntos críticos observando el cambio de signo de $f'(x)$ antes y después del punto.

- Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, hay un máximo local.
- Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, hay un mínimo local.
- Si no cambia de signo, el punto crítico no corresponde a un máximo ni a un mínimo.

Ejemplo: Para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. El signo cambia de $+$ a $-$ en $x = 0$: máximo local.
Cambia de $-$ a $+$ en $x = 2$: mínimo local.

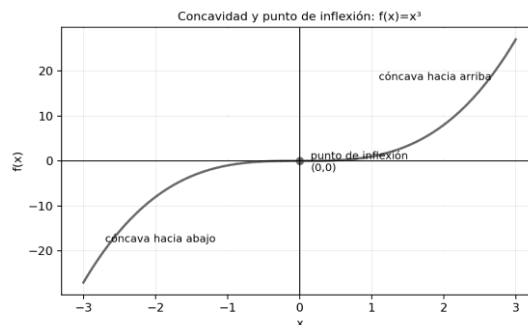
4.8 Concavidad y puntos de inflexión

La concavidad describe la forma de curvatura de la gráfica. Para estudiarla se usa la segunda derivada, porque esta indica cómo cambia la pendiente de la función. Si $f''(x) > 0$, hay concavidad hacia arriba.

Si $f''(x) < 0$, hay concavidad hacia abajo. Un punto de inflexión ocurre cuando la función cambia de concavidad. Para confirmarlo no basta con que $f''(x) = 0$; también debe existir cambio de signo en la segunda derivada.

Figura 3

Concavidad y punto de inflexión de una función



4.9 Criterio de la segunda derivada

El criterio de la segunda derivada permite clasificar algunos puntos críticos de manera rápida.

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x_0)$ es un mínimo local.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces $f(x_0)$ es un máximo local.
- Si $f''(x_0) = 0$, el criterio no decide y se debe usar otro análisis.

Aplicación: Para $f(x) = x^2 - 4x$, $f'(x) = 2x - 4$ y el punto crítico es $x = 2$. Como $f''(x) = 2 > 0$, el punto corresponde a un mínimo local.

4.10 Análisis completo de funciones

Analizar completamente una función significa integrar varias herramientas: dominio, cortes con los ejes, signos de la primera y segunda derivada, extremos, concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

- Determinar el dominio de la función.
- Calcular intersecciones con los ejes, si es posible.
- Estudiar $f'(x)$ para crecimiento, decrecimiento y puntos críticos.
- Estudiar $f''(x)$ para concavidad e inflexión.
- Analizar límites y asíntotas.
- Organizar la información para bosquejar la gráfica.

Este procedimiento evita estudiar la función de forma desordenada. La idea es construir una descripción global de su comportamiento.

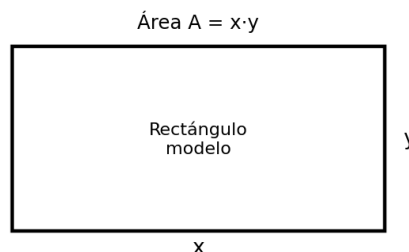
4.11 Problemas de optimización

Optimizar significa encontrar el mejor valor posible de una cantidad: máximo o mínimo. En estos problemas se debe construir una función objetivo y usar la derivada para analizar sus extremos.

- Leer cuidadosamente el enunciado e identificar qué se debe maximizar o minimizar.
- Definir variables y, si es posible, hacer un dibujo.
- Plantear la función objetivo.
- Usar las restricciones para dejar la función en una sola variable.
- Derivar, igualar a cero y encontrar puntos críticos.
- Verificar si el resultado es máximo o mínimo e interpretarlo en el contexto.

Ejemplo guiado: Hallar dos números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo. Si $x + y = 100$, entonces $y = 100 - x$. El producto es $P(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$. Derivando: $P'(x) = 100 - 2x$. Al igualar a cero: $x = 50, y = 50$. El producto máximo es 2500.

Figura 4
Modelo rectangular para un problema de optimización



Ejemplo: Se quiere cercar un terreno rectangular usando 80 m de cerca. ¿Qué dimensiones maximizan el área?

Paso 1. Si x es largo y y es ancho, entonces el perímetro cumple: $2x + 2y = 80$. Por tanto,
 $y = 40 - x$.

Paso 2. La función área queda en una sola variable.

$$A(x) = x(40 - x) = 40x - x^2$$

Paso 3. Derivamos e igualamos a cero.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 40 - 2x \\ 40 - 2x &= 0 \Rightarrow x = 20 \end{aligned}$$

Paso 4. Sustituimos en $y = 40 - x$: $y = 20$.

Conclusión: El área máxima se obtiene con un cuadrado de 20 m por 20 m. La derivada permite encontrar la mejor dimensión posible.

4.12 Razones de cambio relacionadas

Las razones de cambio relacionadas aparecen cuando varias cantidades cambian al mismo tiempo y están conectadas mediante una ecuación. Generalmente dependen del tiempo.

- Identificar las variables que cambian con el tiempo.
- Escribir la relación matemática entre ellas.
- Derivar ambos lados respecto al tiempo t .
- Sustituir los datos conocidos.
- Despejar la razón de cambio solicitada e interpretar unidades.

Ejemplo: El radio de un círculo aumenta a razón de 3 cm/s . ¿A qué razón cambia el área cuando el radio mide 4 cm ?

Paso 1. El área es $A = \pi r^2$ y como r cambia con el tiempo, derivamos respecto a t .

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

Paso 2. Sustituimos $r = 4$ y $\frac{dr}{dt} = 3$.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4)(3) = 24\pi$$

Conclusión: El área cambia a razón de $24\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Este tipo de problema exige identificar variables, ecuación base y razón de cambio solicitada.

4.13 Aplicaciones de la derivada en movimiento: velocidad y aceleración

Cuando una función $s(t)$ representa la posición de un objeto en el tiempo, sus derivadas tienen interpretación física directa: $v(t) = s'(t)$ y $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

La velocidad indica qué tan rápido cambia la posición y la aceleración indica qué tan rápido cambia la velocidad, si $v(t) > 0$, el objeto se mueve en dirección positiva; si $v(t) < 0$, se mueve en dirección negativa, si $a(t) > 0$, la función velocidad es creciente; si $a(t) < 0$, la función velocidad es decreciente.

Ejemplo: Si $s(t) = t^2 + 3t$, entonces $v(t) = 2t + 3$ y $a(t) = 2$. Esto significa que la aceleración es constante y positiva.

4.14 Ejercicios propuestos

- I. Determinar crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
- II. Hallar máximos y mínimos de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
- III. Analizar concavidad y punto de inflexión de $f(x) = x^3 - 3x$.
- IV. Hallar las asíntotas de $f(x) = \frac{1}{(x-2)}$.
- V. Resolver un problema de optimización donde se maximice el área de un rectángulo con perímetro fijo.
- VI. Si $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, hallar velocidad y aceleración.

Respuestas: I. Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Decrece en $(1, 3)$. Máximo local: $(1, 4)$. Mínimo local: $(3, 0)$.

II. Mínimo en $(3, -4)$. III. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. Cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$. Punto de inflexión: $(0, 0)$. IV. Asíntota vertical: $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = 0$. V. $x = y = P/4$. Área máxima: $A_{\max} = P^2/16$. VI. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. $a(t) = 6t - 12$.

La derivada permite analizar el comportamiento de una función y resolver problemas relacionados con crecimiento, extremos, optimización y razones de cambio. Sus aplicaciones facilitan la interpretación de situaciones matemáticas y físicas, convirtiéndola en una herramienta fundamental para comprender y modelar fenómenos de variación.