

1 Aplicaciones de la derivada

1.1 Presentación

Este capítulo muestra cómo se utiliza la derivada para analizar el comportamiento de funciones y resolver problemas aplicados. Se estudian crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, máximos, mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, optimización, razones de cambio, velocidad y aceleración.

1.2 Objetivo general

Aplicar la derivada para analizar funciones, clasificar extremos, estudiar concavidad y resolver problemas de optimización y razón de cambio.

1.3 Resultados de aprendizaje

- Identificar intervalos de crecimiento, decrecimiento y puntos críticos de una función aplicando el criterio de la primera derivada.
- Determinar máximos, mínimos, concavidad y puntos de inflexión mediante el uso de la primera y segunda derivada.
- Resolver problemas de optimización y razones de cambio relacionadas mediante la formulación de modelos matemáticos basados en derivadas.
- Esbozar la gráfica completa de una función integrando dominio, puntos críticos, crecimiento, decrecimiento, concavidad, asíntotas y criterios de derivación.

1.4 Análisis del crecimiento y decrecimiento de funciones

Una de las primeras aplicaciones de la derivada es determinar si una función sube o baja en un intervalo, esto ayuda a comprender el comportamiento de la gráfica sin depender únicamente de un dibujo. Si $f'(x) > 0$, la función crece.

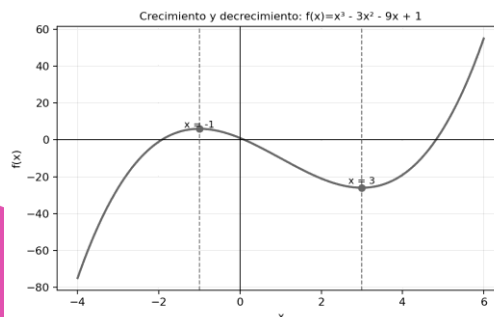
- Si $f'(x) < 0$, la función decrece.
- Calcular la derivada $f'(x)$.
- Encontrar los valores donde $f'(x) = 0$ o donde no existe.
- Dividir el dominio en intervalos.
- Probar el signo de $f'(x)$ en cada intervalo.
- Concluir dónde la función crece o decrece.

Ejemplo:

Para $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, se obtiene $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Al resolver $f'(x) = 0$ se obtiene $x = -1$ y $x = 3$. La función crece en $(-\infty, -1)$, decrece en $(-1, 3)$ y vuelve a crecer en $(3, \infty)$.

Figura 1

Comportamiento creciente y decreciente de una función



1.5 Puntos críticos de una función

Los puntos críticos son valores de la variable independiente donde puede cambiar el comportamiento de una función. Aparecen cuando la derivada se anula o cuando la derivada no existe.

Puntos críticos: $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

No todo punto crítico es automáticamente un máximo o un mínimo. Por eso, después de encontrarlos, se debe analizar el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha.

Idea clave: Los puntos críticos son candidatos. Para decidir si realmente corresponden a máximos, mínimos o puntos especiales, se aplican criterios de la primera o segunda derivada.

1.6 Máximos y mínimos relativos y absolutos

Un máximo o mínimo representa un valor extremo de la función. Puede ser relativo, si se compara solo con puntos cercanos, o absoluto, si se compara con todo el dominio considerado.

Tabla 1

Clasificación de máximos y mínimos de una función

Tipo	Interpretación
Máximo relativo	La función alcanza un valor mayor que los valores cercanos.
Mínimo relativo	La función alcanza un valor menor que los valores cercanos.
Máximo absoluto	Es el valor más alto de toda la función en el dominio.
Mínimo absoluto	Es el valor más bajo de toda la función en el dominio.

Ejemplo: si $f(x) = x^2 - 4x$, entonces $f'(x) = 2x - 4$. Al resolver $2x - 4 = 0$ se obtiene $x = 2$.

Como la parábola abre hacia arriba, en $x = 2$ hay un mínimo.

1.7 Criterio de la primera derivada

El criterio de la primera derivada clasifica los puntos críticos observando el cambio de signo de $f'(x)$ antes y después del punto.

- Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, hay un máximo local.
- Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, hay un mínimo local.
- Si no cambia de signo, el punto crítico no corresponde a un máximo ni a un mínimo.

Ejemplo: Para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. El signo cambia de $+$ a $-$ en $x = 0$: máximo local.
Cambia de $-$ a $+$ en $x = 2$: mínimo local.

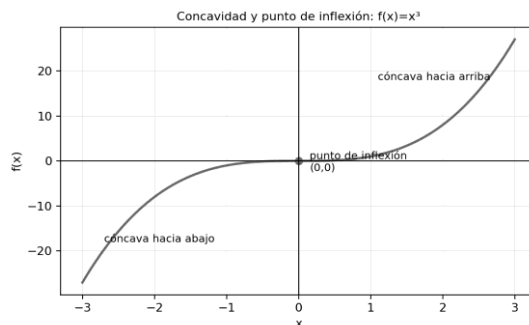
1.8 Concavidad y puntos de inflexión

La concavidad describe la forma de curvatura de la gráfica. Para estudiarla se usa la segunda derivada, porque esta indica cómo cambia la pendiente de la función. Si $f''(x) > 0$, hay concavidad hacia arriba.

Si $f''(x) < 0$, hay concavidad hacia abajo. Un punto de inflexión ocurre cuando la función cambia de concavidad. Para confirmarlo no basta con que $f''(x) = 0$; también debe existir cambio de signo en la segunda derivada.

Figura 2

Concavidad y punto de inflexión de una función



1.9 Criterio de la segunda derivada

El criterio de la segunda derivada permite clasificar algunos puntos críticos de manera rápida.

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x_0)$ es un mínimo local.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces $f(x_0)$ es un máximo local.
- Si $f''(x_0) = 0$, el criterio no decide y se debe usar otro análisis.

Aplicación: Para $f(x) = x^2 - 4x$, $f'(x) = 2x - 4$ y el punto crítico es $x = 2$. Como $f''(x) = 2 > 0$, el punto corresponde a un mínimo local.

1.10 Análisis completo de funciones

Analizar completamente una función significa integrar varias herramientas: dominio, cortes con los ejes, signos de la primera y segunda derivada, extremos, concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

- Determinar el dominio de la función.
- Calcular intersecciones con los ejes, si es posible.
- Estudiar $f'(x)$ para crecimiento, decrecimiento y puntos críticos.
- Estudiar $f''(x)$ para concavidad e inflexión.
- Analizar límites y asíntotas.
- Organizar la información para bosquejar la gráfica.

Este procedimiento evita estudiar la función de forma desordenada. La idea es construir una descripción global de su comportamiento.

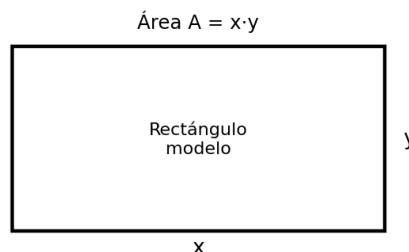
1.11 Problemas de optimización

Optimizar significa encontrar el mejor valor posible de una cantidad: máximo o mínimo. En estos problemas se debe construir una función objetivo y usar la derivada para analizar sus extremos.

- Leer cuidadosamente el enunciado e identificar qué se debe maximizar o minimizar.
- Definir variables y, si es posible, hacer un dibujo.
- Plantear la función objetivo.
- Usar las restricciones para dejar la función en una sola variable.
- Derivar, igualar a cero y encontrar puntos críticos.
- Verificar si el resultado es máximo o mínimo e interpretarlo en el contexto.

Ejemplo guiado: Hallar dos números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo. Si $x + y = 100$, entonces $y = 100 - x$. El producto es $P(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$. Derivando: $P'(x) = 100 - 2x$. Al igualar a cero: $x = 50, y = 50$. El producto máximo es 2500.

Figura 3
Modelo rectangular para un problema de optimización



Ejemplo: Se quiere cercar un terreno rectangular usando 80 m de cerca. ¿Qué dimensiones maximizan el área?

Paso 1. Si x es largo y y es ancho, entonces el perímetro cumple: $2x + 2y = 80$. Por tanto,
 $y = 40 - x$.

Paso 2. La función área queda en una sola variable.

$$A(x) = x(40 - x) = 40x - x^2$$

Paso 3. Derivamos e igualamos a cero.

$$A'(x) = 40 - 2x$$

$$40 - 2x = 0 \Rightarrow x = 20$$

Paso 4. Sustituimos en $y = 40 - x$: $y = 20$.

Conclusión: El área máxima se obtiene con un cuadrado de 20 m por 20 m. La derivada permite encontrar la mejor dimensión posible.

1.12 Razones de cambio relacionadas

Las razones de cambio relacionadas aparecen cuando varias cantidades cambian al mismo tiempo y están conectadas mediante una ecuación. Generalmente dependen del tiempo.

- Identificar las variables que cambian con el tiempo.
- Escribir la relación matemática entre ellas.
- Derivar ambos lados respecto al tiempo t .
- Sustituir los datos conocidos.
- Despejar la razón de cambio solicitada e interpretar unidades.

Ejemplo: El radio de un círculo aumenta a razón de 3 cm/s . ¿A qué razón cambia el área cuando el radio mide 4 cm ?

Paso 1. El área es $A = \pi r^2$ y como r cambia con el tiempo, derivamos respecto a t .

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

Paso 2. Sustituimos $r = 4$ y $\frac{dr}{dt} = 3$.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4)(3) = 24\pi$$

Conclusión: El área cambia a razón de $24\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Este tipo de problema exige identificar variables, ecuación base y razón de cambio solicitada.

1.13 Aplicaciones de la derivada en movimiento: velocidad y aceleración

Cuando una función $s(t)$ representa la posición de un objeto en el tiempo, sus derivadas tienen interpretación física directa: $v(t) = s'(t)$ y $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

La velocidad indica qué tan rápido cambia la posición y la aceleración indica qué tan rápido cambia la velocidad, si $v(t) > 0$, el objeto se mueve en dirección positiva; si $v(t) < 0$, se mueve en dirección negativa, si $a(t) > 0$, la función velocidad es creciente; si $a(t) < 0$, la función velocidad es decreciente.

Ejemplo: Si $s(t) = t^2 + 3t$, entonces $v(t) = 2t + 3$ y $a(t) = 2$. Esto significa que la aceleración es constante y positiva.

1.14 Ejercicios propuestos

- I. Determinar crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
- II. Hallar máximos y mínimos de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
- III. Analizar concavidad y punto de inflexión de $f(x) = x^3 - 3x$.
- IV. Hallar las asíntotas de $f(x) = \frac{1}{(x-2)}$.
- V. Resolver un problema de optimización donde se maximice el área de un rectángulo con perímetro fijo.
- VI. Si $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, hallar velocidad y aceleración.

Respuestas: I. Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Decrece en $(1, 3)$. Máximo local: $(1, 4)$. Mínimo local: $(3, 0)$.

II. Mínimo en $(3, -4)$. III. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. Cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$. Punto de inflexión: $(0, 0)$. IV. Asíntota vertical: $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = 0$. V. $x = y = P/4$. Área máxima: $A_{\max} = P^2/16$. VI. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. $a(t) = 6t - 12$.

La derivada permite analizar el comportamiento de una función y resolver problemas relacionados con crecimiento, extremos, optimización y razones de cambio. Sus aplicaciones facilitan la interpretación de situaciones matemáticas y físicas, convirtiéndola en una herramienta fundamental para comprender y modelar fenómenos de variación.