

GUÍA DE ESTUDIO – PAMA

Radicales y Exponentes Racionales

Propiedades de los radicales, exponentes racionales y racionalización

Contenido de la guía

- Definición de raíz n -ésima y propiedades de los radicales
- Simplificación de expresiones con radicales
- Definición de exponentes racionales y su relación con los radicales
- Leyes de exponentes aplicadas a exponentes racionales
- Racionalización de expresiones: caso monomio y caso binomio
- Ejercicios resueltos y de selección múltiple
- Ejercicios propuestos y respuestas

Resumen del temario

Esta guía desarrolla el concepto de raíz n -ésima y sus propiedades, la definición de los exponentes racionales como una extensión de los exponentes enteros, y el procedimiento de racionalización para eliminar raíces del numerador o del denominador de una expresión. Se estudian las precauciones más frecuentes al trabajar con radicales (como $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$), la simplificación de expresiones radicales y exponenciales, la combinación de radicales semejantes, y los dos casos de racionalización: cuando la expresión es un monomio y cuando es un binomio (usando el conjugado).

Introducción

Para dar significado a una potencia cuyo exponente es un número racional, por ejemplo $2^{4/5}$, es necesario estudiar primero los radicales. Los radicales y los exponentes racionales están estrechamente relacionados: toda expresión radical puede escribirse como una potencia con exponente fraccionario, y viceversa. Esta guía presenta de forma progresiva la definición de raíz n -ésima, sus propiedades, la definición de exponentes racionales, y finaliza con el proceso de racionalización, acompañando cada tema de ejemplos resueltos paso a paso.

Objetivo y resultado de aprendizaje

Objetivo: Comprender la definición y propiedades de los radicales y los exponentes racionales, y aplicar el procedimiento de racionalización para simplificar expresiones algebraicas.

Resultado de aprendizaje: Al finalizar esta guía, el estudiante estará en capacidad de simplificar expresiones con radicales, convertir entre notación radical y exponencial, aplicar las leyes de los exponentes a exponentes racionales, y racionalizar el numerador o denominador de una expresión, tanto en el caso de un monomio como en el de un binomio.

Parte 1. Radicales

Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

Definición de una raíz n

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz n principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{81} = 3 \text{ porque } 3^4 = 81 \quad \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ porque } (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ **no están definidas** (no existe raíz de índice par de un número negativo).

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Propiedades de raíces n

Propiedad

Ejemplo

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n es par $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

Verificación de la propiedad 3: descomponiendo $729 = 3^6$ (729, 243, 81, 27, 9, 3, 1 dividiendo sucesivamente entre 3), tenemos

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = |3| = 3$$

Ejemplo: Simplificar las siguientes expresiones

a)

$$\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot \sqrt[3]{x}$$

b) (usando $81 = 3^4$)

$$\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{x^8} \cdot \sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{(x^2)^4} \cdot |y| = 3x^2|y|$$

c)

$$\sqrt[5]{x^{10}y^{20}} = \sqrt[5]{(x^2)^5(y^4)^5} = x^2y^4$$

Precaución:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo: $\sqrt{2^2 + 3^2} \neq 2 + 3$, es decir $\sqrt{13} \neq 5$. Tampoco $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$, es decir $\sqrt{13} \neq 2 + 3 = 5$.

Sí se puede hacer:

$$\sqrt{(a+b)^2} = a+b$$

Evite cometer el siguiente error: $\sqrt{x^2 + y^2} \neq \sqrt{(x+y)^2}$. Por ejemplo, con $x = 1, y = 2$: $\sqrt{1^2 + 2^2} \neq \sqrt{(1+2)^2}$, es decir $\sqrt{5} \neq \sqrt{3^2} = |3| = 3$.

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros

y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que las leyes de exponentes enteros también se cumplen para exponentes racionales.

Ejemplo: Usando la definición de exponentes racionales:

a) $4^{1/2} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$

b) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $125^{-1/3} = \frac{1}{125^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

Ejemplo 2: Uso de las leyes de exponentes enteros con exponentes racionales

a)

$$a^{1/3} \cdot a^{7/3} = a^{\frac{1}{3} + \frac{7}{3}} = a^{8/3} = \sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{(a^2)^3 \cdot a^2} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

b)

$$\frac{a^{2/5} \cdot a^{7/5}}{a^{3/5}} = \frac{a^{9/5}}{a^{3/5}} = a^{6/5} = \sqrt[5]{a^6} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a} = a \sqrt[5]{a}$$

c)

$$(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2} = \sqrt{2^3} a^{9/2} b^6 = 2\sqrt{2} \cdot a^4 \sqrt{a} \cdot b^6 = 2a^4b^6\sqrt{2a}$$

d)

$$\left(\frac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 \left(\frac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \left(\frac{2^3x^{9/4}}{y}\right) (x^{1/2}y^4) = 8x^{9/4+1/2}y^3 = 8x^{11/4}y^3 = 8y^3\sqrt[4]{x^{11}} = 8x^2y^3\sqrt[4]{x^3}$$

Ejercicio

Escriba cada expresión radical usando exponentes, y expresión exponencial usando radicales.

Expresión radical

Expresión exponencial

$$\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{5^{1/2}}$$

$$\sqrt[3]{7^2}$$

$$7^{2/3}$$

$$\sqrt[3]{4^2}$$

$$4^{2/3}$$

$$\sqrt{11^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{11^3}}$$

$$11^{-3/2}$$

$$\sqrt[5]{5^3}$$

$$5^{3/5}$$

$$\sqrt{2^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{2^3}}$$

$$2^{-1.5} = 2^{-3/2} = \frac{1}{2^{3/2}}$$

$$\sqrt[5]{a^2}$$

$$a^{2/5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

$$x^{-5/2}$$

Ejercicio: Elimine exponentes negativos y simplifique

a)

$$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{x - y} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{x - y} = \frac{\frac{y + x}{xy}}{x - y} = \frac{x + y}{(x - y)(xy)} = \frac{x + y}{-(y - x)(xy)}$$

b)

$$(125x^4y^3 \div 27x^{-2}y^6)^{1/3} = \left(\frac{125x^4y^3}{27x^{-2}y^6}\right)^{1/3} = \frac{125^{1/3}x^{4/3}y^{3/3}}{27^{1/3}x^{-2/3}y^{6/3}} = \frac{\sqrt[3]{125}x^{4/3}y}{\sqrt[3]{27}x^{-2/3}y^2} = \frac{5x^2y^{-1}}{3} = \frac{5x^2}{3y}$$

c)

$$\left(x^{-1/4}\right)^{-1/5} = x^{1/20} = \sqrt[20]{x}$$

Combinación de radicales

a) (usando $32 = 2^5$ y $200 = 2^3 \cdot 5^2$)

$$\begin{aligned}\sqrt{32} + \sqrt{200} &= \sqrt{8 \cdot 4} + \sqrt{8 \cdot 25} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{4} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{4 \cdot 2} \cdot 2 + \sqrt{4 \cdot 2} \cdot 5 \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 2 + 2\sqrt{2} \cdot 5 = 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = \sqrt{2}(4 + 10) = 14\sqrt{2}\end{aligned}$$

b)

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$$

Parte 2. Racionalización

Procedimiento mediante el cual se eliminan raíces, ya sea del numerador o del denominador. Existen dos casos para racionalizar:

- 1) Cuando la expresión a racionalizar es un **monomio**.
- 2) Cuando la expresión a racionalizar es un **binomio**.

Caso 1: la expresión es un monomio

Si tenemos una expresión de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, con $a > 0$ y $n > m$, entonces el **factor racionalizante** es $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejemplo: Racionalizar el denominador de las siguientes expresiones:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ Factor racionalizante: $\sqrt{5^{2-1}} = \sqrt{5}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ Factor racionalizante: $\sqrt[3]{x^2}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x \cdot x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

3)

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4)

$$\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x \cdot y^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$$

5)

$$\sqrt[3]{\frac{2x^4y^4}{9x}} = \frac{\sqrt[3]{2x^4y^4}}{\sqrt[3]{9x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(9x)^2}}{\sqrt[3]{(9x)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(2x^4y^4)(81x^2)}}{\sqrt[3]{(9x)^3}} = \frac{\sqrt[3]{162x^6y^4}}{9x}$$

6) Factor racionalizante: $\sqrt[4]{(27x^2)^3}$

$$\sqrt[4]{\frac{5x^8y^3}{27x^2}} = \frac{\sqrt[4]{5x^8y^3}}{\sqrt[4]{(27x^2)^1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(27x^2)^3}}{\sqrt[4]{(27x^2)^3}} = \frac{\sqrt[4]{(5x^8y^3)(27^3x^6)}}{\sqrt[4]{(27x^2)^4}} = \frac{\sqrt[4]{27^3 \cdot 5x^{14}y^3}}{27x^2}$$

Caso 2: la expresión es un binomio

Para racionalizar una expresión que involucre un binomio se utiliza el **conjugado**.

Ejemplo: $\sqrt{5} - 3$, el conjugado es $\sqrt{5} + 3$.

Racionalizar:

1)

$$\frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = \frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{5} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

(el denominador $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2$ es una diferencia de cuadrados)

2)

$$\frac{2}{\sqrt{x} - 5} \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 5} = \frac{2(\sqrt{x} + 5)}{(\sqrt{x})^2 - (5)^2} = \frac{2(\sqrt{x} + 5)}{x - 25} = \frac{2\sqrt{x} + 10}{x - 25}$$

3)

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} &= \frac{(2x-1)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{x})^2} = \frac{(2x-1)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(x-1)-x} \\ &= \frac{(2x-1)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{-1} = -(2x-1)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})\end{aligned}$$

Ejercicio de selección múltiple

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, de acuerdo con la siguiente fracción

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{m^3}}$$

- a) El radical que está en el dividendo es $\sqrt[4]{m^3}$.
- b) Para racionalizar la fracción se debe amplificar por $\sqrt[4]{m}$.
- c) Al elevar al cuadrado toda la fracción, se obtiene como numerador $\sqrt{m^3}$ y como denominador m .

Solución: a) Falso – el dividendo (numerador) es $\sqrt{m}$. b) Verdadero. c) Falso.

2. El factor racionalizante de $\frac{1}{\sqrt[5]{a}}$ es

- a) $\sqrt[5]{a}$
- b) $\sqrt[5]{a^2}$
- c) $\sqrt[5]{a^4}$

Solución: La respuesta correcta es c) $\sqrt[5]{a^4}$, ya que $\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^1}$ y el factor racionalizante es $\sqrt[5]{a^{5-1}} = \sqrt[5]{a^4}$.

3. La expresión $\frac{\sqrt[12]{x^5y^7}}{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{xy}}}}$ es igual a

- a) $\sqrt{xy}$
- b) $\sqrt[6]{x^2y^3}$
- c) $\sqrt[3]{xy}$
- d) $\sqrt[12]{x^2y^5}$

Solución: La respuesta correcta es **b)** $\sqrt[6]{x^2y^3}$.

Justificación: el denominador $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{xy}}}$ equivale a $\sqrt[12]{xy}$ (pues $3 \times 2 \times 2 = 12$), por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[12]{x^5y^7}}{\sqrt[12]{xy}} = \sqrt[12]{\frac{x^5y^7}{xy}} = \sqrt[12]{x^4y^6} = x^{4/12}y^{6/12} = x^{2/6}y^{3/6} = \sqrt[6]{x^2y^3}$$

4. El factor racionalizante de $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2+b^2}}$ es

- a) $\sqrt[3]{a+b}$
- b) $\sqrt[3]{a-b}$
- c) $\sqrt[3]{a^4+b^4}$
- d) $\sqrt[3]{a^4+b^4+2a^2b^2}$

Solución: La respuesta correcta es **d)** $\sqrt[3]{a^4+b^4+2a^2b^2}$.

Justificación: el denominador es $\sqrt[3]{(a^2+b^2)^1}$, así que el factor racionalizante es $\sqrt[3]{(a^2+b^2)^2}$:

$$\sqrt[3]{(a^2+b^2)^2} = \sqrt[3]{a^4+2a^2b^2+b^4} = \sqrt[3]{a^4+b^4+2a^2b^2}$$

Ejercicios propuestos

Simplificación de radicales – Simplifique las siguientes expresiones

- a) $\sqrt{75}$
- b) $\sqrt[3]{x^7}$
- c) $\sqrt[4]{16x^4y^8}$
- d) $\sqrt{48} + \sqrt{27}$
- e) $2\sqrt{20} - 3\sqrt{45}$

Exponentes racionales – Simplifique y elimine los exponentes negativos

- a) $9^{3/2}$
- b) $16^{-3/4}$
- c) $x^{2/3} \cdot x^{1/6}$

d) $\frac{a^{4/5}}{a^{1/5}}$

e) $(27a^6b^3)^{1/3}$

Racionalización – Racionalice el denominador de cada expresión

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

d) $\frac{4}{\sqrt{x} + 2}$

e) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

Respuestas a los ejercicios propuestos

Simplificación de radicales

a) $5\sqrt{3}$.

b) $x^2\sqrt[3]{x}$.

c) $2|x|y^2$.

d) $7\sqrt{3}$.

e) $-5\sqrt{5}$.

Exponentes racionales

a) 27.

b) $\frac{1}{8}$.

c) $\sqrt[6]{x^5}$.

d) $\sqrt[5]{a^3}$.

e) $3a^2b$.

Racionalización

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$.

c) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

d) $\frac{4\sqrt{x} - 8}{x - 4}$.

e) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}$.

Referencias bibliográficas

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2017). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (7.^a ed.). Cengage Learning.
- Larson, R. (2016). *Precálculo* (9.^a ed.). Cengage Learning.