

1 Derivadas

1.1 Presentación

Este capítulo introduce la derivada como una herramienta para estudiar el cambio instantáneo de una función. Se explica su interpretación como razón de cambio, pendiente de la recta tangente y límite, además de las reglas básicas de derivación, regla del producto, cociente, cadena, derivadas trigonométricas y derivación implícita.

1.2 Objetivo general

Comprender el concepto de derivada y aplicar reglas de derivación para resolver funciones algebraicas, trigonométricas, compuestas e implícitas.

1.3 Resultados de aprendizaje

- Interpretar el significado geométrico y físico de la derivada a partir de la razón de cambio instantánea, la pendiente de la recta tangente y el límite del cociente diferencial.
- Calcular derivadas de funciones algebraicas y trigonométricas aplicando reglas básicas de derivación, regla del producto, regla del cociente y regla de la cadena.
- Determinar derivadas implícitas utilizando las propiedades operacionales del cálculo diferencial y procedimientos de diferenciación respecto a una variable.

1.4 Introducción al cálculo diferencial

El cálculo diferencial es una parte de las matemáticas que estudia cómo cambian las cantidades. Muchas situaciones de la vida real involucran cambios: un automóvil cambia su velocidad, una población aumenta o disminuye, una empresa modifica sus costos, una temperatura varía con el tiempo. Para estudiar estos cambios aparece uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada.

La derivada permite responder preguntas como:

- ¿Qué tan rápido cambia una cantidad?
- ¿Cuál es la pendiente de una curva en un punto?
- ¿Una función está creciendo o decreciendo?
- ¿En qué punto una función alcanza un máximo o un mínimo?

En términos sencillos, la derivada mide el cambio instantáneo de una función. Es decir, nos dice cómo cambia una función exactamente en un punto.

1.5 La derivada como razón de cambio instantánea

Antes de hablar de razón de cambio instantánea, recordemos la idea de razón de cambio promedio. Si una función $f(x)$ cambia desde un valor $x = a$ hasta otro valor $x = b$, la razón de cambio promedio se calcula como $\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}$, esta expresión indica cuánto cambia la función en promedio dentro de un intervalo.

1.6 La derivada como pendiente de la recta tangente

Otra forma muy importante de entender la derivada es desde la geometría. Cuando observamos una curva, podemos preguntarnos: ¿Cuál es la pendiente de la curva en un punto específico? En una recta, la

pendiente se calcula fácilmente porque la inclinación es constante. Pero en una curva, la inclinación cambia en cada punto. Para resolver este problema, usamos la idea de una recta tangente. La recta tangente es una recta que toca la curva en un punto y representa la inclinación de la curva justo en ese lugar. La derivada en un punto es la pendiente de esa recta tangente.

$$f'(a) = \text{pendiente de la recta tangente en } x = a.$$

1.7 Definición de derivada mediante límites

La derivada se define formalmente usando límites. Esta definición muestra de dónde vienen las reglas de derivación. La derivada de una función $f(x)$ se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Esta expresión se conoce como el cociente de diferencias o cociente de Fermat.

Ejemplo. Hallar la derivada de: $f(x) = x^2$

Usamos la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Primero calculamos:

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

Desarrollamos:

$$f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2$$

Ahora sustituimos en la fórmula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

Cancelamos x^2 con $-x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

Factorizamos h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

Cancelamos h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$$

Finalmente, evaluamos el límite:

$$f'(x) = 2x$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Idea clave: Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto. Sin embargo, una función continua puede no ser derivable en puntos angulosos o en puntos con tangente vertical.

Caso donde una función no es derivable

Punto anguloso: ocurre cuando la gráfica tiene un cambio brusco de dirección. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable allí porque tiene una punta.

Discontinuidad: si una función no es continua en un punto, entonces no puede ser derivable en ese punto.

Tangente vertical: ocurre cuando la pendiente se vuelve infinita o no puede representarse como un número real.

Para que una función sea derivable, debe ser continua, pero además debe tener una pendiente única y bien definida.

1.8 Reglas básicas de derivación

Aunque la derivada puede calcularse usando límites, en la práctica se utilizan reglas que permiten derivar de manera más rápida.

Derivada de una constante: La derivada de una constante es cero, $\frac{d}{dx}(c) = 0$.

Ejemplo: $\frac{d}{dx}(7) = 0$. Esto ocurre porque una constante no cambia.

Regla de la potencia: Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$. Esta es una de las reglas más usadas.

Ejemplo: $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$; $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$; $\frac{d}{dx}(x) = 1$.

1.9 Derivadas de funciones algebraicas

Las funciones algebraicas incluyen polinomios, raíces, fracciones y potencias. Para derivarlas, muchas veces conviene reescribirlas como potencias.

Ejemplo: Derivar $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$

Derivamos término a término $f'(x) = 12x^3 - 10x + 0$ y por lo tanto $f'(x) = 12x^3 - 10x$.

Recomendación para el estudiante: Antes de derivar, revisa si puedes escribir raíces y fracciones como potencias. Esto hace que el procedimiento sea más sencillo.

1.10 Regla del producto y regla del cociente

No todas las funciones se derivan término a término. Cuando aparecen multiplicaciones o divisiones de funciones, se necesitan reglas especiales.

Regla del producto. Si $h(x) = f(x) * g(x)$ entonces $h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$.

En otras palabras: se deriva la primera función y se deja la segunda igual, luego se suma la primera función igual por la derivada de la segunda.

Ejemplo: Derivar $h(x) = x^2 \sin(x)$. Identificamos $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$ y derivamos

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = \cos(x).$$

Aplicamos la regla del producto y obtenemos que

$$h'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x).$$

Ejemplo: Derivar $f(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$

Paso 1. Identificamos un producto:

$$u = x^2 \text{ y } v = \cos(3x). \quad u' = 2x \text{ y } v' = -3\sin(3x).$$

Paso 2. Aplicamos la regla del producto:

$$(uv)' = u'v + uv'. f'(x) = 2x\cos(3x) + x^2[-3\sin(3x)].$$

Por lo tanto

$$f'(x) = 2x\cos(3x) - 3x^2\sin(3x).$$

Regla del cociente. Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$. Esta regla se usa cuando una función está dividida entre otra.

Ejemplo: Derivar $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ entonces identificamos $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$

Derivando cada función $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 1$ y aplicamos la regla del cociente

$$h'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 1)(1)}{x^2}. \text{ Simplificamos } h'(x) = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} \text{ y por lo tanto } h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

1.11 Regla de la cadena

La regla de la cadena se usa cuando una función está dentro de otra función. A esto se le llama función compuesta. Si $h(x) = f(g(x))$ entonces $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

En palabras: se deriva la función externa, se deja la interna igual y luego se multiplica por la derivada de la función interna.

Ejemplo: Derivar $h(x) = (3x + 1)^5$. La función externa es la potencia 5. La función interna es $3x + 1$. Aplicamos la regla de la cadena y obtenemos que $h'(x) = 5(3x + 1)^4(3)$, por lo tanto $h'(x) = 15(3x + 1)^4$.

Error común: Un error frecuente es derivar solo la función externa y olvidar multiplicar por la derivada de la función interna.

1.12 Derivadas de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas también tienen reglas de derivación. Las principales son:

$$\frac{d}{dx} [\sin(x)] = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\cos(x)] = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\tan(x)] = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\cot(x)] = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\sec(x)] = \sec(x) \tan(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\csc(x)] = -\csc(x) \cot(x)$$

Cuando el argumento no es simplemente x , se debe aplicar regla de la cadena.

1.13 Derivación implícita

Hasta ahora hemos trabajado con funciones donde y está despejada, por ejemplo, $y = x^2 + 3x$. Pero hay casos donde x y y aparecen mezcladas en una misma ecuación, como $x^2 + y^2 = 25$. En este caso, y no está despejada. A estas relaciones se les llama funciones implícitas. La derivación implícita permite encontrar $\frac{dy}{dx}$ sin necesidad de despejar y .

Pasos para derivar implícitamente

- Derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x .
- Cada vez que se derive una expresión con y , multiplicar por $\frac{dy}{dx}$.
- Agrupar los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$.
- Factorizar y despejar $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo: Hallar la derivada de $x^2 + y^2 = 25$.

Derivamos ambos lados respecto a x : $\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25$. La derivada de x^2 es $2x$. La derivada de y^2 es $2y \frac{dy}{dx}$. La derivada de 25 es 0. $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ Despejamos $2y \frac{dy}{dx} = -2x$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$

Simplificamos $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ por lo tanto $y' = -\frac{x}{y}$. Esta derivada indica la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en cualquier punto donde y no sea cero.

Ejemplo: Hallar $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación $x^2y + y^2 = 10$

Paso 1. Derivamos respecto a x . En x^2y se usa regla del producto. $\frac{d(x^2y)}{dx} = 2xy + x^2 \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

Paso 2. Sustituimos en la ecuación derivada,

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

Paso 3. Agrupamos los términos con $\frac{dy}{dx}$ y despejamos, $(x^2 + 2y) \frac{dy}{dx} = -2xy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 2y}$$

1.14 Ejercicios propuestos

- | | |
|---|---|
| I. Derivar: $f(x) = 6x^5 - 4x^3$ | V. Derivar usando regla de la cadena: $f(x) = (5x^2 - 4x + 1)^6$ |
| II. Derivar: $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ | VI. Derivar: $f(x) = \cos(3x^2)$ |
| III. Derivar usando regla del producto: $f(x) = x^3 \sin(x)$ | VII. Hallar dy/dx mediante derivación implícita: $x^2 + y^2 = 16$ |
| IV. Derivar usando regla del cociente: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ | VIII. Hallar la segunda derivada de: $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ |

Respuestas: I. $f'(x) = 30x^4 - 12x^2 + 2$ II. $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) + 3x^2$ III. $f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$ IV. $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)/(x - 1)^2$ V. $f'(x) = 6(10x - 4)(5x^2 - 4x + 1)^5$ VI. $f'(x) = -6x \sin(3x^2)$ VII. $dy/dx = -x/y$ VIII. $f''(x) = 20x^3 - 12x$.

La derivada permite estudiar el cambio de una función. Para resolver ejercicios, se debe identificar la regla adecuada y aplicar el procedimiento con orden.

