

SUMAS DE RIEMANN

PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS

Resumen

Las sumas de Riemann constituyen una herramienta fundamental del cálculo integral utilizada para aproximar el área bajo la curva de una función continua en un intervalo determinado. Este método consiste en dividir el intervalo en subintervalos y sumar las áreas de rectángulos cuya altura está determinada por el valor de la función en ciertos puntos del intervalo. A medida que el número de subdivisiones aumenta, la aproximación se vuelve más precisa y converge al valor exacto de la integral definida. Las sumas de Riemann permiten comprender el concepto de integral como un límite de sumas y representan uno de los fundamentos teóricos del cálculo integral.

1. Introducción

El cálculo integral es una rama esencial de las matemáticas que permite estudiar áreas, volúmenes, acumulación de cantidades y diversos fenómenos físicos y matemáticos. Uno de los conceptos centrales para comprender la integral definida es la suma de Riemann, introducida por el matemático alemán Bernhard Riemann.

Este método consiste en aproximar el área bajo la gráfica de una función mediante la suma de áreas de rectángulos construidos sobre subdivisiones de un intervalo. Dependiendo del punto donde se evalúe la función dentro de cada subintervalo, se pueden obtener diferentes aproximaciones como la suma por la izquierda, por la derecha o por puntos medios.

A medida que el número de rectángulos aumenta y el ancho de cada subintervalo disminuye, la aproximación se vuelve cada vez más precisa, acercándose al valor exacto del área bajo la curva. Este proceso conduce al concepto de integral definida, que se interpreta como el límite de las sumas de Riemann cuando el número de particiones tiende a infinito.

2. Objetivos

- Explicar el concepto de suma de Riemann y su importancia en el cálculo integral.
- Describir el procedimiento para aproximar áreas bajo una curva utilizando rectángulos.
- Analizar la relación entre las sumas de Riemann y la integral definida mediante el concepto de límite.

3. Justificación

El estudio de las sumas de Riemann es fundamental para comprender el concepto de integral definida, uno de los pilares del cálculo. Este método permite interpretar la integral no solo como una fórmula matemática, sino como un proceso de aproximación basado en la suma de áreas pequeñas.

Comprender este concepto facilita el aprendizaje de temas más avanzados como integrales definidas, integrales impropias, cálculo de volúmenes, trabajo en física y acumulación de cantidades en diversas áreas de la ingeniería, economía y ciencias aplicadas.

Además, el aprendizaje de las sumas de Riemann motiva al estudiante a desarrollar un pensamiento analítico y lógico, fortaleciendo su capacidad para resolver problemas matemáticos y aplicarlos en situaciones reales. A través de este tema, el estudiante puede comprender cómo las matemáticas permiten modelar fenómenos cotidianos y procesos presentes en la tecnología, la ingeniería y las ciencias. Esto genera mayor interés por el cálculo, al evidenciar que no se trata únicamente de operaciones teóricas, sino de herramientas útiles para la formación profesional y la solución de problemas del entorno.

Un ejemplo relacionado con este concepto puede observarse en el desarrollo de los videojuegos y las películas animadas. Muchos motores gráficos calculan continuamente movimientos, velocidades, iluminación y trayectorias aproximando pequeños cambios en intervalos muy cortos de tiempo, de manera similar a las sumas de Riemann. Gracias a estos procesos es posible crear animaciones fluidas, simulaciones realistas y efectos visuales avanzados. Aunque los desarrolladores y usuarios no piensen directamente en cálculo al jugar o ver una película, detrás de estas tecnologías existen principios matemáticos de aproximación y acumulación que permiten recrear movimientos y escenarios casi reales. Esto demuestra cómo conceptos estudiados en cálculo tienen aplicaciones directas en tecnologías modernas que forman parte de la vida cotidiana y del entretenimiento actual.

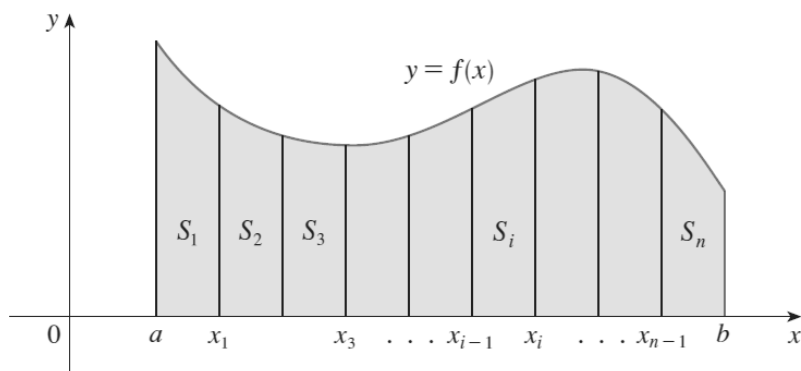
4. Definición

Límite de una función: El área bajo la gráfica de una función positiva $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ corresponde a la región limitada por la curva, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Partición de un intervalo: una partición del intervalo $[a, b]$ consiste en dividirlo en n subintervalos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Gráficamente:



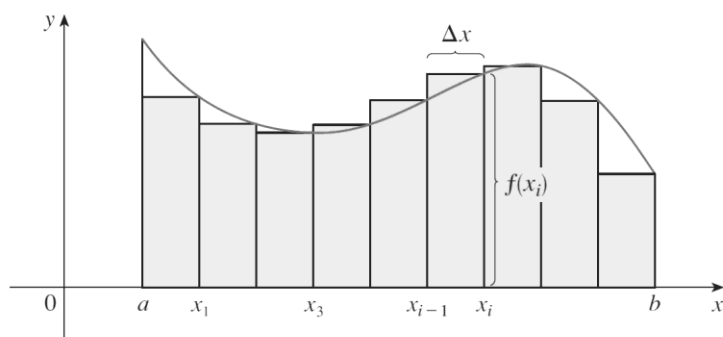
Suma de Riemann: es la suma de las áreas de los rectángulos formados en cada intervalo.

La base de cada rectángulo es:

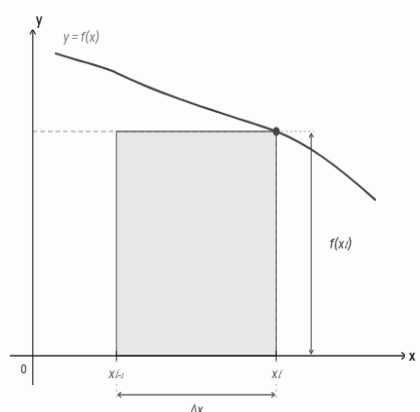
$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

La altura esta dada por el valor de la función en un punto del subintervalo, es decir, si aproximamos la i -ésima franja, S_i , con un rectángulo de ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f en el punto extremo de la derecha. Entonces, el área del i -ésimo rectángulo es $f(x_i) \Delta x$. Lo que concebimos de manera intuitiva como el área de S se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$



Analizando solamente uno de los rectángulos, identificamos lo siguiente:



Dependiendo del punto elegido, existen tres sumas principales: suma por la izquierda, suma por la derecha y suma por el punto medio.

5. Ecuaciones

La suma de Riemann se utiliza para aproximar el área bajo una curva mediante la suma de áreas de rectángulos contruidos sobre pequeños subintervalos. A medida que el número de subintervalos aumenta, la aproximación se vuelve más precisa, acercándose al valor exacto de la integral definida. Matemáticamente, se expresa como:

$$A = S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Donde:

- n representa el número de subintervalos en los que se divide el intervalo de estudio
- Δx corresponde al ancho de cada subintervalo
- $f(x_i)$ representa la altura del rectángulo obtenida al evaluar la función en un punto del subintervalo
- x_i es el punto dentro del subintervalo donde se evalúa la función.
-

Este procedimiento permite comprender cómo una suma de pequeñas áreas puede aproximar el área total bajo una curva, constituyendo la base del concepto de integral definida en cálculo.

Cuando el número de subdivisiones aumenta indefinidamente y el ancho de cada intervalo se reduce de la misma manera, la suma de Riemann converge a la **integral definida**.

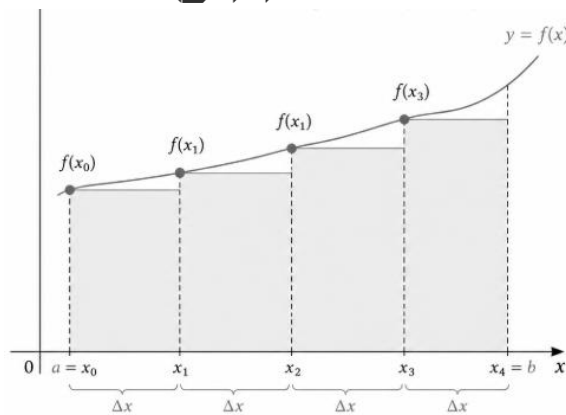
$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Ahora, dependiendo del punto elegido dentro del subintervalo, se obtiene diferentes tipos de sumas de Riemann:

Suma de Riemann por la izquierda:

La altura de cada rectángulo se toma evaluando la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo.

$$x_i = a + (i - 1)\Delta x$$



Ejemplo: Utilice la suma de Riemann y aproxime el área bajo la curva $y = x^2$ en $[0,2]$ con $n = 4$

Calculamos Δx :

$$\Delta x = \frac{2 - 0}{4} = 0.5$$

Puntos izquierdos: $x_i = 0, 0.5, 1, 1.5$

Y con

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Tenemos:

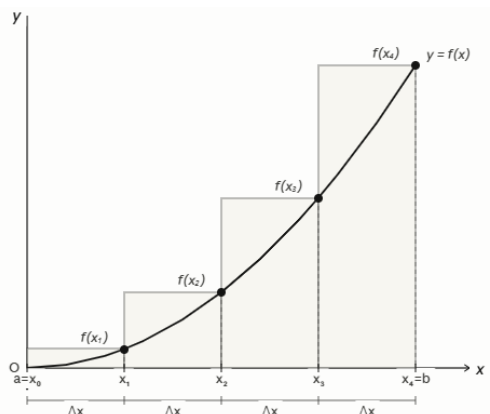
$$R_n = 0.5(0 + 0.25 + 1 + 2.25)$$

$$R_n = 1.75$$

Suma de Riemann por la derecha:

La altura de cada rectángulo se toma evaluando la función en el extremo derecho de cada subintervalo.

$$x_i = a + i\Delta x$$



Ejemplo: Utilice la suma de Riemann y aproxime el área bajo la curva $y = x^2$ en $[0,2]$ con $n = 4$

Calculamos Δx :

$$\Delta x = \frac{2 - 0}{4} = 0.5$$

Puntos derechos: $x_i = 0.5, 1, 1.5, 2$

Y con

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Tenemos:

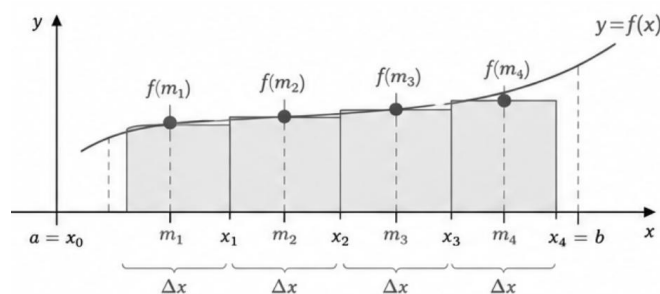
$$R_n = 0.5(0.25 + 1 + 2.25 + 4)$$

$$R_n = 3.75$$

Suma de Riemann por el punto medio:

La altura de cada rectángulo se toma evaluando la función en el punto medio de cada subintervalo.

$$x_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x$$



Ejemplo: Utilice la suma de Riemann y aproxime el área bajo la curva $y = x^2$ en $[0,2]$ con $n = 4$

Calculamos Δx :

$$\Delta x = \frac{2 - 0}{4} = 0.5$$

Puntos medios: $x_i = 0.25, 0.75, 1.25, 1.75$

Y con

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Tenemos:

$$R_n = 0.5(0.0625 + 0.5625 + 1.5625 + 3.0625)$$

$$R_n = 2.625$$

Sumatorias importantes en las sumas de Riemann:

Al desarrollar las sumas de Riemann para funciones polinómicas, aparecen expresiones que incluyen sumatorias de potencias de i . Las más utilizadas son:

1. Suma de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Suma de los cuadrados de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Suma de los cubos de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Existen también las siguientes expresiones, aunque no suelen ser muy comunes a la hora de desarrollar las sumas de Riemann, pero es importante tenerlas en cuenta:

4. Suma de Senos

$$\sum_{i=1}^n \sin(i\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

5. Aproximación del seno (cuando n es muy grande y Δx es pequeño)

$$\sin(x) \approx x$$

6. Suma de cosenos

$$\sum_{i=1}^n \cos(i\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

7. Aproximación del coseno (cuando n es muy grande y Δx es pequeño)

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

8. Logaritmo natural

$$\sum_{i=1}^n \ln(i) = \ln(n!)$$

Estas expresiones permiten simplificar las sumatorias que aparecen al calcular el límite de una suma de Riemann y facilitan la obtención del valor exacto de la integral.

6. Ejemplos

- a. Aproximar el área bajo la curva $f(x) = x$ en el intervalo $[0,4]$ con 4 rectángulos por la izquierda.

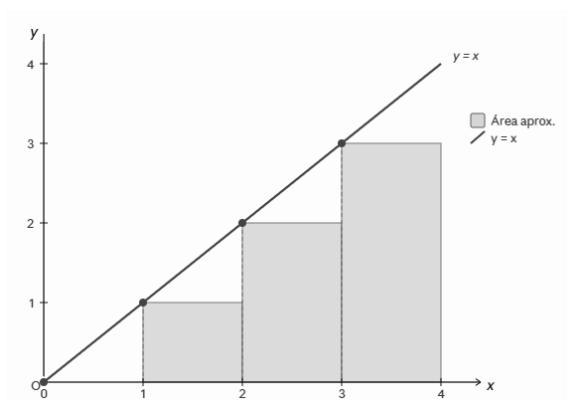
Identificamos:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

Puntos:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

Gráficamente:

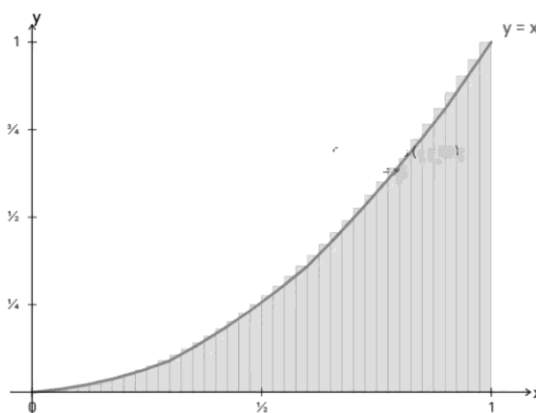


Valores: $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$

Suma: $S_4 = (0 + 1 + 2 + 3) = 6$

El área aproximada es de $6 u^2$ (unidades cuadradas)

- b. Calcular el área bajo la curva: $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ usando sumas de Riemann



Identificamos ancho del intervalo:

Dividimos el intervalo $[1,0]$ en n partes iguales: $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

Usando puntos por la derecha: $x_i = \frac{i}{n}$

Evaluamos en la función:

$$f(x_i) = (x_i)^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

Construimos la suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Sustituyendo:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3}$$

Sacamos la constante:

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Usando

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sustituyendo:

$$S_n = \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

Calculamos el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \end{aligned}$$

Dividiendo entre n^3 :

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6}$$

Ahora, cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{3}{n} \rightarrow 0 \quad y \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

Entonces:

$$S_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

El área de la región es de $1/3$ unidades cuadradas.

7. Ejercicios

- Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestra de los puntos extremos de la derecha y $a=0$, $b=3$ y $n=6$. Luego tome a $n=n$ subintervalos.
Respuesta: -3.937,-6.75
- Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 3$, en el intervalo $[1,2]$. Utilice extremos de la derecha. *Respuesta: $16/3$*
- Hallar el área de la región bordeada por las gráficas de $f(x) = (x - 1)^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$, y el eje x mediante el cálculo del límite de las sumas de Riemann. *Respuesta: 9*
- Hallar el área de la región bordeada por las gráficas de $f(x) = 2(x - 1)^3$, $x = -2$, $x = 0$, y el eje x mediante el cálculo del límite de las sumas de Riemann. *Respuesta: 40*
- Hallar el área bajo la curva de la región $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en e intervalo $[4,1]$.
Respuesta: -3

8. Conclusiones

A lo largo de este informe se analizó el concepto de sumas de Riemann, el cual constituye uno de los fundamentos del cálculo integral. Se explicó cómo es posible aproximar el área bajo una curva mediante la suma de áreas de rectángulos contruidos sobre subdivisiones de un intervalo.

Asimismo, se evidenció que a medida que el número de subdivisiones aumenta, la aproximación se vuelve más precisa, convergiendo al valor exacto del área representado por la integral definida. Esto demuestra la relación directa entre las sumas de Riemann y el concepto formal de integral.

El estudio de este método permite comprender de manera más profunda el significado geométrico y analítico de la integral, facilitando la resolución de problemas relacionados con áreas, acumulación de cantidades y fenómenos presentes en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Recomendaciones para el estudiante:

- Comprender bien el concepto de intervalo y partición antes de aplicar sumas de Riemann.
- Practicar con diferentes números de rectángulos para observar cómo mejora la aproximación.
- Diferenciar entre suma por la izquierda, derecha y punto medio.
- Relacionar siempre las sumas de Riemann con el concepto de integral definida.
- Realizar ejercicios gráficos para visualizar mejor las aproximaciones.

9. Referencias

Espinoza Ramos, E. (2002). *Análisis Matemático I para Estudiantes de Ciencia e Ingeniería* (Tercera Edición). [Impreso por Editorial Servicios Gráficos J.J.].

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable, Trascendentes tempranas* (Séptima Edición). (M. del C. Rodríguez Pedroza, Trad.). Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.