

1 Límites y continuidad

1.1 Presentación

Este capítulo presenta el concepto de límite como una herramienta para estudiar el comportamiento de una función cerca de un punto. Se trabajan límites laterales, propiedades algebraicas, técnicas de cálculo, límites trigonométricos, asíntotas y continuidad.

1.2 Objetivo general

Comprender y calcular límites de funciones mediante métodos algebraicos, numéricos y gráficos, reconociendo su relación con la continuidad y el comportamiento de las funciones.

1.3 Resultados de aprendizaje

- Explicar el comportamiento de aproximación de una función mediante el concepto intuitivo y formal de límite.
- Calcular límites determinados e indeterminados empleando sustitución directa, propiedades algebraicas, factorización, racionalización y límites trigonométricos fundamentales.
- Evaluar la continuidad de funciones mediante el análisis de la existencia del límite, los límites laterales y el valor de la función en un punto.
- Determinar límites infinitos, límites al infinito y asíntotas básicas para describir el comportamiento extremo de una función.

1.4 Introducción al concepto de límite

En cálculo, el límite permite estudiar el comportamiento de una función cuando la variable independiente se acerca a un valor determinado. Lo importante no es necesariamente el valor exacto de la función en ese punto, sino la tendencia que toma la función cerca de él.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Esta expresión se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L . Significa que cuando x se acerca al valor a , los valores de $f(x)$ se acercan al valor L .

Idea clave: El límite mira lo que ocurre alrededor del punto, no obligatoriamente lo que ocurre exactamente en el punto.

Por ejemplo, si una función se acerca al valor 5 cuando x se aproxima a 3, podemos decir que su límite es 5, aunque la función no esté definida exactamente en $x = 3$.

1.5 Definición formal del límite

Se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esta definición expresa de manera rigurosa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse tanto como se desee a L cuando x se aproxima suficientemente a a . En otras palabras, al hacer que x esté lo suficientemente cerca de a , sin ser igual a a , se puede lograr que $f(x)$ esté tan cerca de L como se quiera.

1.6 Interpretación numérica del límite

Una forma sencilla de entender un límite es aproximarse al valor de interés desde ambos lados y observar qué sucede con la función. Esto puede hacerse mediante una tabla de valores o mediante una gráfica. Consideremos la función $f(x) = 2x - 1$, para analizar qué ocurre cuando x se acerca a 3.

Tabla 1

Aproximación numérica al límite de una función

Aproximación por la izquierda	$f(x)$	Aproximación por la derecha	$f(x)$
$x = 2.9$	4.8	$x = 3.1$	5.2
$x = 2.99$	4.98	$x = 3.01$	5.02
$x = 2.999$	4.998	$x = 3.001$	5.002

Al observar la tabla, los valores de la función se acercan a 5 tanto por la izquierda como por la derecha. Por eso se concluye que $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 1 = 5$

Para recordar: Si al aproximarnos por ambos lados la función se acerca al mismo valor, entonces el límite puede existir.

1.7 Límites laterales y existencia del límite

Para estudiar correctamente un límite, muchas veces es necesario analizar qué ocurre cuando x se acerca al punto por la izquierda y por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

representa el límite por la izquierda, es decir, cuando x se aproxima a a tomando valores menores que a .

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

representa el límite por la derecha, es decir, cuando x se aproxima a a tomando valores mayores que a .

La condición de existencia del límite bilateral es:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

Esto quiere decir que el límite general existe únicamente cuando ambos límites laterales existen y tienen el mismo valor. Si los límites laterales son diferentes, el límite no existe.

Error común: Algunos estudiantes evalúan solo por un lado y concluyen que el límite existe. Siempre que haya funciones por partes, valor absoluto o posibles saltos, se deben revisar ambos lados.

1.8 Propiedades algebraicas de los límites

Las propiedades de los límites permiten calcular límites de funciones más complejas a partir de límites más sencillos. Si existen los límites de $f(x)$ y $g(x)$, entonces se pueden aplicar las siguientes propiedades:

Tabla 2

Propiedades algebraicas de los límites

Propiedad	Expresión
Suma o resta	$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
Producto	$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
Cociente	$\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}, \text{ si } \lim g(x) \neq 0$
Potencia	$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
Constante	$\lim k = k$

Estas propiedades son útiles cuando la función no genera indeterminaciones y puede evaluarse directamente. El primer método para calcular un límite es la sustitución directa. Esta consiste en reemplazar la variable por el valor al que tiende, siempre que no aparezca una indeterminación.

Recomendación: Si al sustituir se obtiene un número real definido, ese será el valor del límite. Si aparece $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ u otra forma indeterminada, se debe aplicar otra técnica.

1.9 Límites indeterminados y técnicas de factorización

Una indeterminación ocurre cuando la sustitución directa no permite conocer el valor del límite. Una de las más comunes es $\frac{0}{0}$. Esta forma no significa que el límite no exista. Significa que la expresión debe transformarse para descubrir la verdadera tendencia de la función. Cuando hay polinomios, una técnica muy útil es la factorización.

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$ entonces lo primero es sustituir $x = 3$ y se tiene que $\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ como aparece una indeterminación, factorizamos el numerador usando diferencia de cuadrados, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ y reemplazando la expresión en el límite tenemos que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$. Como en un límite x se acerca a 3 pero no es exactamente 3, podemos cancelar el factor común $x - 3$ y queda el límite $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3)$, ahora sustituimos y nos queda que $3 + 3 = 6$ y se concluye que $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 6$.

Error común: No se debe cancelar antes de factorizar correctamente. Tampoco se debe cancelar si los términos están sumando o restando sin ser factores comunes.

1.10 Límites mediante racionalización

La racionalización se utiliza cuando aparecen raíces y la sustitución directa produce una indeterminación. La idea es multiplicar por el conjugado para eliminar la raíz que impide simplificar. El

conjugado de una expresión como $\sqrt{x} - 1$ es $\sqrt{x} + 1$. Al multiplicarlos se obtiene una diferencia de cuadrados $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$.

Ejemplo. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right)$, primero sustituimos $x = 1$ y nos queda que $\frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$.

Como se obtiene una indeterminación, se multiplica por el conjugado del numerador.

$\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right)$ en el numerador aplicamos diferencia de cuadrados $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$ y cancelamos el factor común $x - 1$ y nos queda el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1},$$

sustituimos el valor de x $\frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}.$$

1.11 Límites con valor absoluto y funciones definidas por partes

Los límites con valor absoluto requieren especial cuidado porque el valor absoluto cambia de expresión dependiendo del signo de lo que está dentro.

$$\begin{aligned} |x| &= x, & \text{si } x &\geq 0 \\ |x| &= -x, & \text{si } x &< 0 \end{aligned}$$

Por esta razón, muchos límites con valor absoluto deben resolverse mediante límites laterales.

Ejemplo. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

Como es una función valor absoluto se analiza por derecha y por izquierda. Por la derecha, cuando $x > 0$, se cumple que $|x| = x$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$.

Ahora analizando por la izquierda, cuando $x < 0$, se cumple que $|x| = -x$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

Como los límites laterales son diferentes, el límite general, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Idea clave: el valor absoluto casi siempre invita a revisar la función por casos.

1.12 Límites mediante cambio de variable

El cambio de variable permite transformar un límite difícil en uno más sencillo. Consiste en reemplazar una expresión por una nueva variable para simplificar la escritura y facilitar el cálculo. Los límites trigonométricos son muy importantes porque aparecen en el estudio de derivadas de funciones trigonométricas y en modelos con comportamiento periódico. Los límites notables más usados son:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

Queremos usar el límite notable $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$, pero en el numerador aparece $\sin(3x)$.

Para que el denominador también tenga $3x$ entonces multiplicamos y dividimos por 3 y se obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{(3x)} \text{ y hacemos el cambio de variable } u = 3x.$$

Si $x \rightarrow 0$, entonces $u \rightarrow 0$, $3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{(u)} = 3 \cdot 1 = 3$ y por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$.

Ejemplo: Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$.

Paso 1. Multiplicamos y dividimos para formar límites notables del tipo $\frac{\sin(u)}{u}$.

$$\frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(5x)}{(5x)} \cdot \frac{(3x)}{\sin(3x)} \cdot \frac{5}{3}$$

Paso 2. Cuando x tiende a 0, $\frac{\sin(5x)}{(5x)}$ tiende a 1 y $\frac{(3x)}{\sin(3x)}$ también tiende a 1, por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \frac{5}{3}.$$

1.13 Teorema del emparedado o de la compresión

El Teorema del Emparedado se usa cuando una función difícil de evaluar queda atrapada entre dos funciones más sencillas que tienen el mismo límite. Si se cumple que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ y, además

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Ejemplo. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sabemos que la función seno siempre está entre -1 y 1 entonces se plantea la desigualdad

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

y multiplicamos todo por x^2 . Como x^2 es positivo, no cambia el sentido de la desigualdad y queda que

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Ahora evaluamos los extremos $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$. Como ambos extremos tienden a 0, la función del centro también tiende a 0 por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

1.14 Límites infinitos y límites al infinito

Un límite infinito aparece cuando la función crece o decrece sin límite al acercarse a un valor específico.

Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$. Esto indica que la función se dispara hacia valores muy grandes positivos o negativos cerca de $x = 3$. En cambio, un límite al infinito estudia el

comportamiento de la función cuando x crece o decrece sin límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Estos límites ayudan a analizar el comportamiento lejano de la gráfica.

1.15 Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

Las asíntotas son rectas a las que una función se aproxima. Permiten describir el comportamiento de la gráfica cerca de puntos problemáticos o cuando x se aleja hacia infinito.

Asíntotas verticales: Una recta $x = a$ es una asíntota vertical si la función tiende a infinito positivo o negativo cuando x se aproxima a a por alguno de sus lados. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.

Ejemplo: para $f(x) = \frac{1}{(x-3)}$, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: Una recta $y = L$ es una asíntota horizontal si la función se acerca a L cuando x tiende a infinito o a menos infinito $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Asíntotas oblicuas: Una asíntota oblicua aparece cuando la función se aproxima a una recta inclinada de la forma $y = mx + b$. En funciones racionales, suele aparecer cuando el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador.

Recomendación: las asíntotas deben interpretarse como guías del comportamiento de la función, no como valores exactos que la función necesariamente deba alcanzar.

1.16 Continuidad de funciones

La continuidad es una propiedad que indica que una función no presenta saltos, huecos ni rupturas en un punto. Una función f es continua en $x = a$ si se cumplen tres condiciones:

$$\begin{aligned} &f(a) \text{ está definida} \\ &\text{Existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{aligned}$$

El límite coincide con el valor de la función: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Si alguna de estas condiciones falla, la función no es continua en ese punto.

Ejemplo. Si una función tiene un hueco en $x = 2$, puede ocurrir que el límite exista, pero que $f(2)$ no esté definido. En ese caso, la función no es continua en $x = 2$. Si la función tiene un salto, los límites laterales son diferentes. En ese caso, el límite no existe y la función tampoco es continua.

1.17 Ejercicios propuestos

- | | |
|--|---|
| <p>I. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 1$. R//: 11</p> <p>II. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. R//: 4</p> <p>III. Calcular por racionalización:
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$. R//: $\frac{1}{4}$</p> <p>IV. Analizar si existe: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$. R//: No existe</p> | <p>V. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x}$. Respuesta: 6</p> <p>VI. Identificar la asíntota vertical de
 $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$. Respuesta: -2</p> <p>VII. Determinar si $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ es continua en $x = 1$. R//: No es continua</p> |
|--|---|

