

GUÍA DE ESTUDIO – PAMA

Exponentes Enteros

Exponentes positivos, negativos y cero – Leyes de los exponentes

Contenido de la guía

- Notación exponencial: base y exponente
- Exponentes cero y exponentes negativos
- El caso indeterminado 0^0
- Leyes de los exponentes
- Ejercicios resueltos: simplificación de expresiones eliminando exponentes negativos
- Ejercicios propuestos y respuestas

Programa de Acompañamiento Académico en Matemáticas (PAMA)
Vicerrectoría Académica – Universidad Tecnológica de Pereira

Resumen del temario

Esta guía desarrolla el concepto de exponente entero como herramienta para representar de forma abreviada productos repetidos de un mismo número. Se estudia la notación exponencial general a^n , los casos especiales del exponente cero y del exponente negativo, y la advertencia sobre la indeterminación de 0^0 . A partir de allí se presentan las siete leyes de los exponentes (producto de potencias, cociente de potencias, potencia de una potencia, potencia de un producto, potencia de un cociente, y las dos leyes para exponentes negativos), cada una con su ejemplo numérico. Finalmente, se resuelven varios ejercicios de simplificación de expresiones algebraicas, eliminando exponentes negativos y aplicando las leyes estudiadas, y se proponen ejercicios adicionales con sus respectivas respuestas para que el estudiante practique de forma autónoma.

Introducción

Los exponentes enteros permiten escribir de manera compacta operaciones que, de otro modo, requerirían largas cadenas de multiplicaciones. Su manejo correcto –incluyendo los casos de exponente cero y exponente negativo– es indispensable para simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones exponenciales y avanzar hacia temas como la notación científica, los polinomios y las funciones exponenciales. Esta guía presenta la teoría de forma progresiva, acompañada de ejemplos y ejercicios resueltos paso a paso.

Objetivo y resultado de aprendizaje

Objetivo: Comprender y aplicar la notación exponencial y las leyes de los exponentes enteros (positivos, negativos y cero) en la simplificación de expresiones algebraicas.

Resultado de aprendizaje: Al finalizar esta guía, el estudiante estará en capacidad de calcular potencias con exponentes positivos, negativos y cero, reconocer la indeterminación de 0^0 , aplicar correctamente las leyes de los exponentes y simplificar expresiones algebraicas eliminando exponentes negativos.

Exponentes enteros (positivos y negativos)

Notación exponencial

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la n -ésima potencia de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.

Ejemplo:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

Atención: $(-3)^4$ no es lo mismo que -3^4 . En el primer caso la base es -3 ; en el segundo, el signo menos no está elevado a la potencia.

Exponentes cero y negativos

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo:

a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

b) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

d) $(-2 + 2)^0 = 0^0$ es **indeterminado**.

e) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^0$ con $x = 2$: $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^0 = 0^0$ es **indeterminado**.

Advertencia: 0^0 es indeterminado.

Leyes de exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar potencias de la misma base, sume los exponentes.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir potencias de la misma base, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a otra potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve numerador y denominador.

$$6. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.

$$7. \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n} \quad \frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$$

Para pasar una potencia del numerador al denominador (o viceversa), cambie el signo del exponente.

Cuidado: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

Ejercicios resueltos

Simplifique las siguientes expresiones, eliminando los exponentes negativos

a) $2x^{-6} \cdot x^{-2}$

b) $2^{10} \cdot 2^{12}$

c) $(7x^4)(-3x^2)$

d) $(-5x^2y^3)(3xy^{-2})$

e) $\frac{10^{-7}}{10^4}$

f) $\frac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^{-2}c)^2}$

g) $\frac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3)^{-1}}$

h) $(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y)\left(\frac{1}{3}x^{-1}y^3\right)$

i) $\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$

j) $\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$

k) $\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

l) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$

m) $5x^{-3} \cdot x^{-4}$

n) $3^{-2} \cdot 3^6$

o) $(4x^{-2})(-2x^5)$

p) $(-2a^3b^{-2})(4a^{-1}b^4)$

q) $\frac{6^{-3}}{6^2}$

r) $\frac{(2xy^2)^3}{(4x^{-1}y)^2}$

s) $\frac{-2m^3n^{-2}}{(m^2n^{-3})^{-1}}$

t) $\left(\frac{2a}{b^2}\right)^{-3}$

Solución:

a) $2x^{-6} \cdot x^{-2} = 2x^{-6+(-2)} = 2x^{-8} = \frac{2}{x^8}$

b) $2^{10} \cdot 2^{12} = 2^{22}$

c) $(7x^4)(-3x^2) = -21x^6$

d) $(-5x^2y^3)(3xy^{-2}) = -15x^3y$

e) $\frac{10^{-7}}{10^4} = 10^{-7-4} = 10^{-11} = \frac{1}{10^{11}}$

f)

$$\frac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^{-2}c)^2} = \frac{3^3 a^3 b^3 c^3}{2^2 a^{-2} b^{-4} c^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{a^3}{a^{-2}} \cdot \frac{b^3}{b^{-4}} \cdot \frac{c^3}{c^2} = \frac{27}{4} a^5 b^7 c$$

donde: $\frac{a^3}{a^{-2}} = a^{3-(-2)} = a^5$, $\frac{b^3}{b^{-4}} = b^{3-(-4)} = b^7$, $\frac{c^3}{c^2} = c^{3-2} = c$

g)

$$\frac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3)^{-1}} = \frac{-xy^2z^3}{x^{-1}y^{-2}z^{-3}} = -x^2y^4z^6$$

h)

$$(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y) \left(\frac{1}{3}x^{-1}y^3 \right) = 4x^{-2}y^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{x^2y}$$

i)

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = 3s^3t^{-6} = \frac{3s^3}{t^6}$$

j)

$$\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} = \frac{(-6)^3 x^3 y^6}{x^2 y^5} = -216xy$$

k)

$$\left(\frac{y}{3z^3} \right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y} \right)^2 = \frac{9z^6}{y^2}$$

l)

$$\left(\frac{x}{y} \right)^3 \left(\frac{y^2x}{z} \right)^4 = \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{y^8x^4}{z^4} = \frac{x^7y^5}{z^4}$$

m) $5x^{-3} \cdot x^{-4} = 5x^{-3+(-4)} = 5x^{-7} = \frac{5}{x^7}$

n) $3^{-2} \cdot 3^6 = 3^{-2+6} = 3^4 = 81$

o) $(4x^{-2})(-2x^5) = -8x^{-2+5} = -8x^3$

p) $(-2a^3b^{-2})(4a^{-1}b^4) = -8a^{3-1}b^{-2+4} = -8a^2b^2$

q) $\frac{6^{-3}}{6^2} = 6^{-3-2} = 6^{-5} = \frac{1}{6^5} = \frac{1}{7776}$

r)

$$\frac{(2xy^2)^3}{(4x^{-1}y)^2} = \frac{8x^3y^6}{16x^{-2}y^2} = \frac{1}{2}x^{3-(-2)}y^{6-2} = \frac{x^5y^4}{2}$$

s)

$$\frac{-2m^3n^{-2}}{(m^2n^{-3})^{-1}} = \frac{-2m^3n^{-2}}{m^{-2}n^3} = -2m^{3-(-2)}n^{-2-3} = -2m^5n^{-5} = \frac{-2m^5}{n^5}$$

t)

$$\left(\frac{2a}{b^2} \right)^{-3} = \left(\frac{b^2}{2a} \right)^3 = \frac{b^6}{8a^3}$$

Resumen de resultados:

a) $\frac{2}{x^8}$	b) 2^{22}	c) $-21x^6$	d) $-15x^3y$
e) $\frac{1}{10^{11}}$	f) $\frac{27}{4}a^5b^7c$	g) $-x^2y^4z^6$	h) $\frac{4}{x^2y}$
i) $\frac{3s^3}{t^6}$	j) $-216xy$	k) $\frac{9z^6}{y^2}$	l) $\frac{x^7y^5}{z^4}$
m) $\frac{5}{x^7}$	n) 81	o) $-8x^3$	p) $-8a^2b^2$
q) $\frac{1}{7776}$	r) $\frac{x^5y^4}{2}$	s) $\frac{-2m^5}{n^5}$	t) $\frac{b^6}{8a^3}$

Ejercicios propuestos

Simplifique las siguientes expresiones, eliminando los exponentes negativos

a) $3x^{-5} \cdot x^{-1}$	b) $4^3 \cdot 4^{-7}$
c) $(2x^3)(-5x^{-6})$	d) $(-3a^4b^{-3})(2a^{-2}b^5)$
e) $\frac{5^{-2}}{5^3}$	f) $\frac{(2xyz)^2}{(x^{-1}y^2z^{-3})^2}$
g) $\frac{-2m^4n^{-1}}{(mn^2)^{-2}}$	h) $\left(\frac{3x}{y^2}\right)^{-2}$
i) $(5x^{-2}y)(2x^3y^{-4})\left(\frac{1}{2}x^{-1}y^2\right)$	j) $\frac{8s^{-3}t^5}{4s^2t^{-1}}$
k) $\frac{(-2xy^3)^4}{x^3y^{10}}$	l) $\left(\frac{a^2}{2b^{-3}}\right)^{-3}$
m) $\frac{-3x^2y^{-4}}{(x^{-3}y^2)^{-1}}$	n) $(4a^{-2}b^3)^2(2ab^{-1})^{-1}$
o) $\left(\frac{x^{-2}y^3}{xy^{-1}}\right)^{-2}$	

Respuestas – Ejercicios propuestos

a) $\frac{3}{x^6}$	b) $\frac{1}{256}$	c) $\frac{-10}{x^3}$	d) $-6a^2b^2$
e) $\frac{1}{3125}$	f) $\frac{4x^4z^8}{y^2}$	g) $-2m^6n^3$	h) $\frac{y^4}{9x^2}$

$$\begin{array}{llll} \text{i) } \frac{5}{y} & \text{j) } \frac{2t^6}{s^5} & \text{k) } 16xy^2 & \text{l) } \frac{8}{a^6b^9} \\ \text{m) } \frac{-3}{xy^2} & \text{n) } \frac{8b^7}{a^5} & \text{o) } \frac{x^6}{y^8} & \end{array}$$

Bibliografía

- Stewart, J. y Watson, S. (2019). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (7.^a ed.). Cengage Learning.