

1 Trigonometría

1.1 Presentación

Este capítulo introduce los conceptos básicos de la trigonometría necesarios para el estudio del cálculo diferencial. Se abordan las razones trigonométricas, la medida de ángulos en grados y radianes, la circunferencia unitaria, los valores notables y las identidades fundamentales.

1.2 Objetivo general

Fortalecer el manejo de las razones e identidades trigonométricas básicas como herramientas previas para comprender límites, derivadas y aplicaciones del cálculo diferencial.

1.3 Resultados de aprendizaje

- Calcular razones trigonométricas en triángulos rectángulos utilizando seno, coseno y tangente, fortaleciendo los conocimientos previos necesarios para el estudio del cálculo diferencial.
- Interpretar la circunferencia unitaria y los valores trigonométricos notables, relacionando ángulos en grados y radianes con las razones trigonométricas fundamentales.
- Demostrar identidades trigonométricas fundamentales mediante procesos de simplificación, conversión de unidades angulares y uso de relaciones pitagóricas.

1.4 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

En este capítulo se estudia principalmente a partir del triángulo rectángulo, ya que en él se definen las razones trigonométricas básicas. En un triángulo rectángulo se identifican tres lados principales:

- **Hipotenusa:** Es el lado más largo del triángulo y siempre está frente al ángulo recto.
- **Cateto opuesto:** Es el lado que queda frente al ángulo que se está analizando.
- **Cateto adyacente:** Es el lado que está junto al ángulo que se está analizando, pero que no es la hipotenusa.

A partir de estos lados se definen las razones trigonométricas principales: seno, coseno y tangente.

$$\sin \theta = \frac{co}{h},$$

$$\cos \theta = \frac{ca}{h},$$

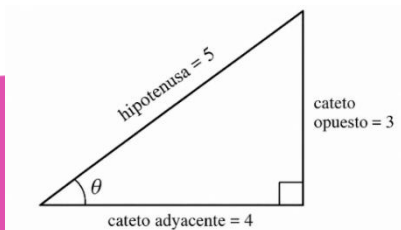
$$\tan \theta = \frac{co}{ca}.$$

Donde, co es el cateto opuesto, ca es el cateto adyacente y h es la hipotenusa; las razones trigonométricas son fundamentales porque permiten encontrar lados o ángulos desconocidos en un triángulo rectángulo.

Ejemplo: Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo donde, respecto al ángulo θ , el cateto opuesto mide 3, el cateto adyacente mide 4 y la hipotenusa mide 5.

Figura 1

Triángulo rectángulo con catetos e hipotenusa



Con los datos conocidos se plantean las tres razones trigonométricas con los datos conocidos: $\sin \theta = \frac{3}{5}$; $\cos \theta = \frac{4}{5}$; $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Uno de los errores más frecuentes es confundir el cateto opuesto con el cateto adyacente. Para evitarlo, siempre se debe mirar primero cuál es el

ángulo de referencia. El cateto opuesto cambia dependiendo del ángulo que se esté analizando.

1.5 Medida de ángulos (grados y radianes)

Los ángulos se pueden medir principalmente de dos formas: en grados y en radianes. Los grados son la medida más conocida. Por ejemplo: 30° , 45° , 60° y 90° . Sin embargo, en cálculo y en otras áreas de las matemáticas se usa con mayor frecuencia en radianes. La relación principal entre grados y radianes es:

$$180^\circ = \pi \text{ radianes}, \text{ y la fórmula de conversión es } \text{grados a radianes} = \text{grados} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

A partir de esta equivalencia podemos convertir grados a radianes.

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}; 45^\circ = \frac{\pi}{4}; 60^\circ = \frac{\pi}{3}; 90^\circ = \frac{\pi}{2}; 180^\circ = \pi.$$

¿Importancia de los radianes? Los radianes son importantes porque muchas fórmulas de cálculo funcionan correctamente cuando los ángulos están expresados en radianes. Por ejemplo, en límites trigonométricos y derivadas de funciones trigonométricas, se trabaja normalmente en radianes.

1.6 Circunferencia unitaria y valores trigonométricos notables

La circunferencia unitaria es aquella con radio de magnitud 1 que puede estar ubicada en el plano cartesiano, con centro en el origen (0,0). Su ecuación está dada por $x^2 + y^2 = 1$. Esta circunferencia permite comprender mejor las funciones trigonométricas, porque cada punto sobre ella se puede relacionar con un ángulo de la siguiente manera:

$$(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Para un ángulo θ , el punto correspondiente en la circunferencia unitaria tiene coordenadas; el coseno representa la coordenada en x, mientras que el seno representa la coordenada en y. Los valores trigonométricos notables son aquellos que aparecen con frecuencia y que conviene memorizar.

Tabla 1

Valores trigonométricos notables en grados y radianes

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-

Nota. La tangente se define como $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. Por esta razón, cuando el coseno es cero, la tangente no existe. Por ejemplo, cuando se evalúa en 90° : $\tan (90^\circ) = \frac{1}{0}$ como no se puede dividir entre cero, la tangente de 90° no existe.

1.7 Identidades trigonométricas fundamentales

Una identidad trigonométrica es una igualdad que se cumple para todos los valores permitidos de la variable. Las identidades son importantes porque permiten transformar, simplificar y resolver expresiones trigonométricas. Las primeras identidades que se deben conocer son las identidades recíprocas:

$$\csc \csc \theta = \frac{1}{\sin \sin \theta}$$

$$\sec \sec \theta = \frac{1}{\cos \cos \theta}$$

$$\cot \cot \theta = \frac{1}{\tan \tan \theta}$$

Estas fórmulas son útiles porque permiten expresar unas funciones trigonométricas en términos de otras.

Ejemplo: Simplificar la expresión $\tan \tan x \cdot \cos \cos x$.

Sabemos que $\tan \tan x = \frac{\sin \sin x}{\cos \cos x}$, entonces sustituimos en la expresión y se obtiene que:

$$\tan \tan x \cdot \cos \cos x = \left(\frac{\sin \sin x}{\cos \cos x} \right) \cdot \cos \cos x$$

Se simplifica $\cos \cos x$ y por lo tanto $\tan \tan x \cdot \cos \cos x = \sin \sin x$.

Un error frecuente es intentar cancelar términos que están sumando o restando. Solo se pueden cancelar factores cuando están multiplicando o dividiendo.

Por ejemplo, en la siguiente expresión no se puede cancelar directamente $\cos(x)$ del numerador con el denominador, porque en el numerador hay una suma $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)}$.

También se tienen las identidades pitagóricas que son las más importantes en trigonometría. Se derivan de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, fundamentadas en $x = \cos \cos \theta$ y $y = \sin \sin \theta$, entonces $\theta + \theta = 1$.

A partir de la identidad fundamental $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se pueden obtener otras identidades. Si dividimos toda la expresión entre $\cos^2 \theta$, $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ entonces:

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

De forma similar, al dividir la identidad fundamental entre $\sin^2 \theta$, se obtiene:

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

Estas identidades son muy usadas para simplificar expresiones y resolver ecuaciones trigonométricas.

1.8 Fórmulas de suma, diferencia y ángulo doble

Las fórmulas de suma y diferencia permiten calcular el seno, coseno o tangente de la suma o resta de dos ángulos. Las principales ecuaciones son:

$$\sin \sin (a \pm b) = \sin \sin (a) \cos \cos (b) \pm$$

$$\cos \cos (a) \sin \sin (b)$$

$$\cos \cos (a \pm b) = \cos \cos (a) \cos \cos (b) \mp$$

$$\sin \sin (a) \sin \sin (b)$$

Es importante observar que en el caso del seno el signo se conserva, mientras que, en las fórmulas del coseno, el signo cambia.

Ahora bien, las fórmulas de **ángulo doble** permiten expresar funciones trigonométricas de $2x$ en términos de funciones de x , las más usadas son:

$$\sin \sin (2x) = 2 \sin \sin (x) \cos \cos (x)$$

$$\cos \cos (2x) = \cos^2 (x) - \sin^2 (x)$$

$$\cos \cos (2x) = 1 - 2 \sin^2 (x)$$

$$\cos \cos (2x) = 2 \cos^2 (x) - 1$$

Estas tres formas de $\cos \cos (2x)$ son equivalentes. La elección depende del ejercicio que se esté resolviendo.

Ahora bien, las fórmulas de ángulo medio se usan para expresar funciones cuyo argumento es $\frac{x}{2}$. Algunas de las más usadas son:

$$\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos \cos (x)}{2}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos \cos (x)}{2}$$

Estas fórmulas aparecen con frecuencia en simplificación trigonométrica y en algunos procesos de cálculo.

1.9 Simplificación de expresiones trigonométricas

Simplificar una expresión trigonométrica significa transformarla en una forma más sencilla, usando identidades conocidas. Para simplificar, se recomienda seguir estos pasos:

- Identificar las funciones trigonométricas presentes.
- Reescribir tangente, cotangente, secante y cosecante en términos de seno y coseno si es necesario.
- Aplicar identidades pitagóricas.
- Cancelar únicamente factores comunes.
- Verificar que la expresión final sea equivalente a la inicial.

Ejemplo: Simplificar la expresión $\frac{1 - x}{\sin \sin x}$.

Usamos la identidad pitagórica $x + x = 1$, y despejando x se obtiene que: $x = 1 - x$, después sustituimos en la primera expresión y se obtiene que $\frac{1 - x}{\sin \sin x} = \frac{x}{\sin \sin x}$, cancelando $\sin \sin x$:

$$\frac{1 - x}{\sin \sin x} = \sin \sin x .$$

1.10 Ejercicios propuestos

- Identificar seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo donde el cateto opuesto mide 8, el cateto adyacente mide 15 y la hipotenusa mide 17. **Respuesta:** $\sin \sin \theta = \frac{8}{17}$, $\cos \cos \theta = \frac{15}{17}$, $\tan \tan \theta = \frac{8}{15}$.
- Convertir los siguientes ángulos a radianes: 45° , 90° , 135° y 180° . **Respuesta:** $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$, $180^\circ = \pi$.
- Simplificar: $\tan \tan x \cos \cos x$. **Respuesta:** $\sin \sin x$.

La trigonometría es una base fundamental para el estudio del cálculo, especialmente en límites, derivadas y aplicaciones de movimiento. Para avanzar con seguridad, el estudiante debe dominar las razones trigonométricas básicas, los valores notables, la conversión entre grados y radianes, y las identidades fundamentales. Más que memorizar fórmulas, es importante comprender de dónde vienen y cómo se usan.

