

GUÍA DE ESTUDIO – PAMA

Sistema de los Números Reales

Conjuntos numéricos y propiedades de los números reales

Contenido de la guía

- Conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales, irracionales y reales
- Representación decimal de los números reales
- Propiedades de los números reales (conmutativa, asociativa, distributiva)
- Propiedades de las fracciones
- Ejercicios resueltos de operaciones con fracciones
- Suma de fracciones utilizando el m.c.m.
- Igualdades y desigualdades con números reales

Resumen del temario

Esta guía aborda el sistema de los números reales ($\mathbb{R}$) como conjunto que agrupa a los números racionales e irracionales. Se estudia la clasificación jerárquica de los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales e irracionales), la forma de representar cualquier número real mediante su expansión decimal, y las propiedades algebraicas fundamentales (conmutativa, asociativa y distributiva) que rigen las operaciones de suma y multiplicación. Finalmente, se profundiza en las propiedades de las fracciones y se resuelven ejercicios prácticos de operaciones combinadas, suma de fracciones con m.c.m. y verificación de igualdades algebraicas.

Introducción

Los números reales constituyen la base sobre la cual se construye gran parte de las matemáticas: desde el álgebra elemental hasta el cálculo diferencial e integral. Comprender cómo se clasifican los números (naturales, enteros, racionales e irracionales) y qué propiedades cumplen sus operaciones permite justificar de manera rigurosa los procedimientos empleados al simplificar expresiones, resolver ecuaciones y manipular fracciones. Esta guía presenta de forma progresiva la teoría necesaria, acompañada de ejemplos y ejercicios resueltos paso a paso.

Objetivo y resultado de aprendizaje

Objetivo: Reconocer y clasificar los distintos conjuntos numéricos que conforman el sistema de los números reales, y aplicar sus propiedades algebraicas y las propiedades de las fracciones en la resolución de operaciones combinadas.

Resultado de aprendizaje: Al finalizar esta guía, el estudiante estará en capacidad de identificar a qué conjunto numérico pertenece un número dado, justificar procedimientos algebraicos mediante las propiedades de los números reales, y resolver correctamente operaciones combinadas con fracciones utilizando el mínimo común múltiplo y la simplificación de expresiones.

Conjuntos numéricos

Todo número real pertenece a alguno de los siguientes conjuntos numéricos, organizados de manera jerárquica.

Tabla de conjuntos numéricos

Conjunto	Representación
Naturales	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
Enteros	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
Racionales	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \right\}$

Irracionales $\mathbb{I} = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$

Reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Números racionales

$$\frac{1}{2}, -\frac{3}{7}, 46, 0.17, 0.\overline{6}, 0.3\overline{17}$$

Enteros: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Naturales: $1, 2, 3, \dots$

Números irracionales

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \pi, \frac{3}{\pi^2}$$

Representación decimal

Todo número real tiene una representación decimal.

- Si el número es **racional**, su representación decimal es **periódica**:

$$\frac{1}{2} = 0.5000\dots = 0.5\overline{0} \quad \frac{2}{3} = 0.6666\dots = 0.\overline{6}$$

$$\frac{157}{495} = 0.3171717\dots = 0.3\overline{17} \quad \frac{9}{7} = 1.285714285714\dots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre.)

- Si el número es **irracional**, la representación decimal **no** es periódica:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots \quad \pi = 3.141592653589793\dots$$

Propiedades de los números reales

Propiedad

Ejemplo

Descripción

Conmutativas

$$a + b = b + a$$

$$7 + 3 = 3 + 7$$

Al sumar dos números, el orden no importa.

$$ab = ba$$

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

Al multiplicar dos números, el orden no importa.

Asociativas

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$$

No importa cuáles dos números se suman primero.

$$(ab)c = a(bc)$$

$$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$$

No importa cuáles dos números se multiplican primero.

Distributivas

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$2(3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

El producto se reparte sobre cada término de la suma.

$$(b + c)a = ab + ac$$

$$(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

Igual que arriba, con el factor a la derecha.

Propiedades de las fracciones

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Multiplicar fracciones: numeradores por numeradores, denominadores por denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Dividir fracciones: multiplicar por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Sumar fracciones con igual denominador: se suman los numeradores.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Sumar fracciones con distinto denominador: se busca común denominador.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	Se cancelan los factores comunes en numerador y denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	Multiplicación cruzada.

Ejercicio 1. Realice las operaciones indicadas

a) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$

b) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{11}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$

d) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \div \frac{3}{4}$

e) $\frac{3 - \frac{5}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{7}}$

f) $\left[10 - \left(7 \div \frac{2}{5}\right)\right] \times \frac{4}{3}$

g) $\left(5 \div \left(3 - \frac{2}{5}\right)\right)^2 \times \left(-3 + \frac{5}{2}\right)$

h) $4\frac{2}{5} + 3\frac{4}{8}$

Solución:

a) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{10 - 12}{15} = \frac{-2}{15}$

b) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{11} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{2} + \frac{6}{35} = \frac{35 + 12}{70} = \frac{47}{70}$

d) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{12 - 36}{18} = \frac{-24}{18} = \frac{-4}{3}$

e)

$$\frac{3 - \frac{5}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{7}} = \frac{\frac{21-5}{7}}{\frac{7+15}{21}} = \frac{\frac{16}{7}}{\frac{22}{21}} = \frac{16 \cdot 21}{7 \cdot 22} = \frac{8 \cdot 3}{1 \cdot 11} = \frac{24}{11}$$

f)

$$\left[10 - \left(7 \div \frac{2}{5}\right)\right] \times \frac{4}{3} = \left[\frac{10}{1} - \frac{35}{2}\right] \times \frac{4}{3} = \frac{20 - 35}{2} \times \frac{4}{3} = -\frac{15}{2} \times \frac{4}{3} = -\frac{60}{6} = -10$$

g)

$$\left(\frac{5}{3 - \frac{2}{5}}\right)^2 \times \left(-3 + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{\frac{13}{5}}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{25}{13}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{625}{338}$$

h)

$$4\frac{2}{5} + 3\frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 5 + 2}{5} + \frac{3 \cdot 8 + 4}{8} = \frac{22}{5} + \frac{28}{8} = \frac{176 + 140}{40} = \frac{316}{40} = \frac{79}{10}$$

Resultados: a) $-\frac{2}{15}$ b) $\frac{6}{11}$ c) $\frac{47}{70}$ d) $-\frac{4}{3}$ e) $\frac{24}{11}$ f) -10 g) $-\frac{625}{338}$ h) $\frac{79}{10}$

Suma de fracciones con m.c.m.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, se utiliza el **m.c.m.** (mínimo común múltiplo) de los denominadores.

Ejemplo 1. Resolver: $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} - \frac{4}{3} + \frac{3}{1}$

Hallamos el m.c.m. de los denominadores 3, 5, 7:

$$\text{m.c.m.}(3, 5, 7) = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

Retomando el ejercicio planteado:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} - \frac{4}{3} + \frac{3}{1} = \frac{63}{105} + \frac{30}{105} - \frac{140}{105} + \frac{315}{105} = \frac{268}{105} = 2\frac{58}{105}$$

Ejemplo 2. Resolver: $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 2$

$$\text{m.c.m.}(5, 3, 5, 1) = 15$$

$$\frac{9}{15} + \frac{10}{15} - \frac{12}{15} + \frac{30}{15} = \frac{37}{15} = 2\frac{7}{15}$$

Regla práctica: el m.c.m. se calcula sobre los **denominadores**; el resultado final se expresa como número mixto dividiendo el numerador entre el denominador.

Ejercicio 3. Igualdades con números reales

Reemplace el símbolo $\square$ con $=$ o con $\neq$, de modo que el enunciado se cumpla para todos los números reales a, b, c, d , siempre que las expresiones estén definidas

a) $\frac{ab+ac}{a} \square b+ac$

b) $\frac{ab+ac}{a} \square b+c$

c) $\frac{b+c}{a} \square \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

d) $\frac{a+c}{b+d} \square \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

e) $\frac{a-b}{b-a} \square -1$

f) $-(a+b) \square -a+b$

Solución:

a) $\frac{ab+ac}{a} = \frac{a(b+c)}{a} = b+c \Rightarrow$ es **diferente** de $b+ac$: $\square \neq$

b) $\frac{ab+ac}{a} = b+c \Rightarrow \square \equiv$

c) $\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \Rightarrow \square \equiv$

d) En general $\frac{a+c}{b+d} \neq \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \Rightarrow \square \neq$

e) Verificación numérica: con $a = 1, b = 2$: $\frac{1-2}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$. En general: $\frac{a-b}{b-a} = \frac{-1(b-a)}{b-a} = -1 \Rightarrow \square \equiv$

f) $-(a+b) = -a-b \neq -a+b \Rightarrow \square \neq$

Ejercicios propuestos

Conjuntos numéricos – Resuelva lo que se pide en cada numeral

- a) ¿A cuáles conjuntos numéricos pertenece -5 ? ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).
- b) ¿A cuáles conjuntos numéricos pertenece $\frac{7}{2}$?
- c) Determine si $\sqrt{16}$ es racional o irracional. Justifique.
- d) Escriba $0.\overline{45}$ como fracción y clasifíquelo.
- e) Diga si es verdadero o falso: “Todo número entero es racional”.

Propiedades de los reales y de las fracciones – Indique la propiedad que justifica cada igualdad (a-c) y simplifique cada expresión (d-e)

- a) $5 + (3 + 8) = (5 + 3) + 8$
- b) $4(x + 7) = 4x + 28$
- c) $9 \times 6 = 6 \times 9$
- d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$
- e) $\frac{5}{6} \div \frac{10}{3}$

Operaciones combinadas con fracciones – Calcule las siguientes operaciones

- a) $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$
- b) $\frac{2}{5} \times \frac{15}{8}$
- c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$
- d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{5}{6}$
- e) $\left(2 - \frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$

Suma con m.c.m. e igualdades – Resuelva usando el m.c.m. (a-b) y reemplace $\square$ con $=$ o $\neq$ (c-e)

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$

b) $2\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4}$

c) $\frac{a+b}{b} \square \frac{a}{b} + 1$ (con $b \neq 0$)

d) $\frac{a}{a+b} \square \frac{1}{b}$ (con $b \neq 0, a+b \neq 0$)

e) $\frac{x-y}{y-x} \square -1$ (con $x \neq y$)

Operaciones combinadas (nivel avanzado) – Calcule las siguientes operaciones

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{7}{10} - \frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12}$

d) $2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

e) $\frac{7}{9} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

Respuestas a los ejercicios propuestos

Conjuntos numéricos

a) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

c) Racional ($\sqrt{16} = 4$).

d) $\frac{5}{11}$; racional.

e) Verdadero.

Propiedades de los reales y de las fracciones

- a) Asociativa de la suma.
- b) Distributiva.
- c) Conmutativa de la multiplicación.
- d) $\frac{2}{3}$.
- e) $\frac{1}{4}$.

Operaciones combinadas con fracciones

- a) $-\frac{1}{12}$.
- b) $\frac{3}{4}$.
- c) $\frac{19}{30}$.
- d) $\frac{1}{5}$.
- e) $\frac{147}{100}$.

Suma con m.c.m. e igualdades

- a) $\frac{1}{12}$.
- b) $4\frac{1}{12}$.
- c) =
- d) $\neq$
- e) =

Operaciones combinadas (nivel avanzado)

- a) $\frac{5}{4}$.
- b) $\frac{11}{20}$.
- c) $\frac{9}{8}$.

d) $1\frac{7}{12}$.

e) $\frac{13}{36}$.

Referencias bibliográficas

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2017). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (7.^a ed.). Cengage Learning.
- Larson, R. (2016). *Precálculo* (9.^a ed.). Cengage Learning.