



Formas Indeterminadas y Regla de L'Hôpital

PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS

Resumen

El presente documento aborda el estudio de las formas indeterminadas y la Regla de L'Hôpital como herramientas fundamentales en el cálculo diferencial e integral, así como su extensión hacia el análisis de integrales impropias. Se presentan las principales formas indeterminadas, su clasificación y los métodos para resolverlas, destacando tanto el uso adecuado como los errores frecuentes en la aplicación de la Regla de L'Hôpital para el análisis de límites.

Posteriormente, se desarrolla el concepto de integrales impropias, incluyendo su clasificación en integrales de primera especie, segunda especie y mixtas, junto con los criterios de convergencia asociados. Como aplicación significativa, se estudia la Trompeta de Gabriel, un ejemplo clásico que evidencia cómo un sólido puede poseer volumen finito y área superficial infinita.

Finalmente, se proponen ejercicios estructurados que permiten al estudiante consolidar los conceptos teóricos, fomentar el pensamiento crítico y comprender la Regla de L'Hôpital como una herramienta más dentro de un marco más amplio en el análisis matemático.

Índice

1	Introducción	4
1.1	Contexto	4
1.2	Motivación	4
1.3	Objetivos	5
2	Formas Indeterminadas	6
2.1	Definición	6
2.2	Clasificación de las Formas Indeterminadas	6
2.2.1	Forma indeterminada $\frac{0}{0}$	6
2.2.2	Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$	7
2.2.3	Forma indeterminada $\infty - \infty$	7
2.2.4	Forma indeterminada $0 \cdot \infty$	7
2.2.5	Forma indeterminada 1^∞	7
2.2.6	Otras formas indeterminadas	7
3	Regla de L'Hôpital	8
3.1	Enunciado del Teorema	8
3.2	Interpretación	8
3.3	Condiciones de Aplicabilidad	9
4	Demostración del Teorema	10
4.1	Teorema del Valor Medio de Cauchy	10
4.2	Demostración de la Regla de L'Hôpital	10
4.2.1	Demostración para la forma $\frac{0}{0}$	10
4.2.2	Demostración para la forma $\frac{\infty}{\infty}$	10
5	Aplicación de la Regla de L'Hôpital	11
5.1	Forma $0/0$	11
5.1.1	Procedimiento	11
5.1.2	Ejemplos	12
5.2	Forma ∞/∞	13
5.2.1	Procedimiento	13
5.2.2	Ejemplos	13
5.3	Forma $\infty - \infty$	14
5.3.1	Procedimiento	14
5.3.2	Ejemplos	15
5.4	Forma $0 \cdot \infty$	16
5.4.1	Procedimiento	16
5.4.2	Ejemplos	17
5.5	Formas indeterminadas exponenciales $0^0, 1^\infty, \infty^0$	18
5.5.1	Procedimiento	18
5.5.2	Ejemplos	18
6	Mal Uso de la Regla de L'Hôpital	20
6.1	Aplicación sin forma indeterminada	20
6.2	Errores en la derivación	21
6.3	Uso reiterado sin convergencia	21
6.4	Ignorar condiciones del teorema	21

7	Integrales Impropias	22
7.1	Definición	22
7.1.1	Convergencia y Divergencia	22
7.1.2	Interpretación	22
7.2	Integrales Impropias de Primera Especie	23
7.2.1	Definición	23
7.2.2	Ejemplos	24
7.3	Integrales Impropias de Segunda Especie	25
7.3.1	Definición	25
7.3.2	Ejemplos	26
7.4	Integrales Impropias Mixtas	27
7.4.1	Definición	28
7.4.2	Ejemplos	29
7.5	Relación con la Regla de L'Hôpital	30
7.5.1	Ejemplo	31
8	Trompeta de Gabriel	32
8.1	Definición	32
8.1.1	Descripción Geométrica	32
8.1.2	Importancia Matemática:	33
8.2	Cálculo del Volumen	33
8.3	Cálculo del Área	34
8.4	Interpretación	35
8.4.1	Interpretación Física:	36
9	Ejercicios Propuestos	36
10	Conclusiones	38
	Bibliografía	38

1. Introducción

En el estudio del cálculo diferencial e integral, el análisis de límites constituye una herramienta esencial para comprender el comportamiento de las funciones. Sin embargo, en múltiples situaciones es común encontrar expresiones que no pueden evaluarse directamente, dando lugar a las denominadas formas indeterminadas.

La Regla de L'Hôpital surge como un método eficaz para resolver ciertos tipos de indeterminaciones, particularmente aquellas de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. No obstante, su aplicación requiere condiciones específicas, y su uso indiscriminado puede conducir a errores conceptuales.

Por otra parte, las integrales impropias amplían el concepto de integral definida al considerar intervalos infinitos o funciones con discontinuidades, lo que implica un análisis más riguroso basado en límites. En este contexto, se establece una conexión natural entre límites, formas indeterminadas e integrales.

El estudio culmina con la Trompeta de Gabriel, un ejemplo que ilustra de manera clara y sorprendente la importancia del análisis riguroso en cálculo, mostrando resultados que contradicen la intuición inicial.

1.1. Contexto

Este trabajo se desarrolla en el contexto de los cursos de cálculo diferencial e integral de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP), donde los estudiantes enfrentan dificultades en la comprensión y aplicación de conceptos como límites, formas indeterminadas, la Regla de L'Hôpital e integrales impropias.

En particular, se ha identificado que muchos estudiantes:

- Aplican la Regla de L'Hôpital sin verificar sus condiciones.
- No distinguen entre distintos tipos de indeterminaciones.
- Presentan dificultades al interpretar integrales impropias
- Carecen de una comprensión conceptual del comportamiento de las funciones en el infinito

Por esta razón, se plantea la necesidad de un material que no solo presente la teoría, sino que también enfatice la correcta interpretación y aplicación de estos conceptos.

1.2. Motivación

La motivación de este documento surge de la necesidad de fortalecer la comprensión conceptual del cálculo, alineándose con la misión, visión y objetivos del Programa de Acompañamiento en Matemáticas (PAMA) de la UTP, evitando que los estudiantes perciban herramientas como la Regla de L'Hôpital como procedimientos mecánicos.

De esta manera se busca promover el uso consciente y justificado de los métodos matemáticos evitando errores comunes en la resolución de límites e integrales. Así como desarrollar una comprensión más profunda del comportamiento de las funciones mostrando aplicaciones que desafíen la intuición, como la Trompeta de Gabriel.

De esta manera, el documento pretende servir como una guía que acompañe el proceso de aprendizaje y facilite la construcción de conocimiento significativo.

1.3. Objetivos

Objetivo General

Desarrollar una guía teórico-práctica que permita comprender, analizar y aplicar correctamente las formas indeterminadas, la Regla de L'Hôpital y las integrales impropias, mediante un enfoque claro, estructurado y pedagógico.

Objetivos Específicos

- Identificar y clasificar las diferentes formas indeterminadas que aparecen en el cálculo de límites.
- Aplicar correctamente la Regla de L'Hôpital, reconociendo sus condiciones de uso.
- Analizar errores comunes en la aplicación de la Regla de L'Hôpital.
- Comprender el concepto de integral impropia y su interpretación como límite.
- Clasificar las integrales impropias en primera especie, segunda especie y mixtas.
- Determinar la convergencia o divergencia de integrales impropias.
- Relacionar el estudio de límites con el análisis de integrales impropias.
- Interpretar aplicaciones geométricas como la Trompeta de Gabriel.
- Desarrollar habilidades de resolución de problemas mediante ejercicios progresivos.

2. Formas Indeterminadas

2.1. Definición

En el estudio de los límites, es común encontrar expresiones cuyo valor no puede determinarse directamente mediante sustitución. Estas expresiones se denominan formas indeterminadas, ya que no permiten concluir de manera inmediata el valor del límite y por tanto requieren un análisis adicional, [1, 2].

De manera formal, una expresión es una forma indeterminada cuando, al evaluar el límite de una función, se obtiene una combinación de valores que no determina un resultado único. Entre las formas indeterminadas más frecuentes se encuentran:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Por ejemplo, consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Al sustituir directamente $x = 0$, se obtiene la expresión $\frac{0}{0}$, que es una forma indeterminada. Sin embargo, este hecho no implica necesariamente que el límite no exista, sino que se requiere aplicar técnicas adicionales para determinar su valor.

Es importante destacar que una forma indeterminada no representa un resultado, sino una situación de ambigüedad que puede resolverse mediante herramientas del cálculo, como simplificación algebraica, factorización o el uso de la Regla de L'Hôpital.

Finalmente, es fundamental distinguir entre una forma indeterminada y una expresión con valor definido. Por ejemplo:

$$\frac{1}{0} \quad \text{No es una forma indeterminada, sino una expresión no definida}$$

Entonces, las formas indeterminadas surgen como una limitación de la sustitución directa en el cálculo de límites y motivan el desarrollo de técnicas y herramientas más avanzadas para su resolución.

2.2. Clasificación de las Formas Indeterminadas

Las formas indeterminadas pueden clasificarse según la operación algebraica que aparece al evaluar un límite mediante sustitución directa. Esta clasificación permite identificar la estrategia más adecuada para analizar cada caso.

A continuación, se presentan las formas indeterminadas más comunes en el cálculo:

2.2.1. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Se presenta cuando tanto el numerador como el denominador tienden a cero:

$$\text{Cuando en } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Esta es una de las formas más frecuentes y suele resolverse mediante simplificación algebraica o la Regla de L'Hôpital. [1, 2]

2.2.2. Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

Ocurre cuando tanto el numerador como el denominador crecen sin límite:

$$\text{Cuando en } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

En estos casos, es necesario comparar el crecimiento de las funciones involucradas. [1, 2]

2.2.3. Forma indeterminada $\infty - \infty$

Se presenta cuando la resta de dos funciones que tienden a infinito genera una expresión ambigua:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)), \text{ con } f(x), g(x) \rightarrow \infty$$

Esta forma no puede resolverse directamente y generalmente requiere transformación algebraica para convertirse en una forma de tipo cociente. [1, 2]

2.2.4. Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Ocurre cuando una función tiende a cero y otra tiende a infinito:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x), \text{ con } f(x) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad g(x) \rightarrow \infty$$

En este caso, es conveniente reescribir el producto como un cociente para poder aplicar herramientas como la Regla de L'Hôpital. [1, 2]

2.2.5. Forma indeterminada 1^∞

Se presenta en expresiones de tipo exponencial donde la base tiende a 1 y el exponente crece sin límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}, \text{ con } f(x) \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad g(x) \rightarrow \infty$$

Esta forma requiere transformaciones logarítmicas para su análisis [1, 2].

2.2.6. Otras formas indeterminadas

También existen otras formas menos frecuentes, como:

$$0^0 \quad \text{y} \quad \infty^0$$

Estas se analizan de manera similar a la forma 1^∞ , utilizando logaritmos y propiedades exponenciales.

En general, muchas de estas formas pueden transformarse en expresiones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, lo que permite aplicar la Regla de L'Hôpital como herramienta principal para su resolución. [1, 2].

En esta sección se introdujeron las principales formas indeterminadas, destacando que su aparición no permite concluir directamente el valor de un límite. Este hecho motiva la necesidad de herramientas más avanzadas para su análisis, como la Regla de L'Hôpital y diversas transformaciones algebraicas, las cuales serán abordadas en las siguientes secciones.

3. Regla de L'Hôpital

3.1. Enunciado del Teorema

El teorema de L'Hôpital proporciona un método para evaluar límites que presentan formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, mediante el uso de derivadas.

Sean f y g funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a un punto a (Excepto, probablemente, en a mismo). Supóngase que:

- f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$
- $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$
- Se cumple una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

o bien,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

Entonces, si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{o es } \pm\infty$$

Se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Este resultado también es válido para límites laterales y para límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Además, es importante notar que este teorema no elimina la indeterminación por sí mismo, sino que la transforma en un nuevo límite que puede ser más fácil de evaluar. Estas condiciones de aplicabilidad se profundizan en [1,2].

En la siguiente sección se presentará la interpretación del teorema y sus condiciones de aplicabilidad, con el fin de comprender cuándo es válido utilizar esta herramienta.

3.2. Interpretación

El teorema de L'Hôpital puede interpretarse como una forma de comparar el comportamiento de dos funciones cuando ambas se aproximan simultáneamente a cero o a infinito.

Cuando se presenta una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, no es suficiente conocer los valores de las funciones, sino que es necesario analizar qué tan rápido cambian cerca del punto de interés. En este contexto, las derivadas proporcionan información sobre la tasa de cambio de las funciones.

La Regla de L'Hôpital establece que, bajo ciertas condiciones, el valor del límite de un cociente de funciones puede determinarse a partir del cociente de sus derivadas. Es decir, en lugar de comparar directamente $f(x)$ y $g(x)$, se comparan sus tasas de cambio $f'(x)$ y $g'(x)$.

De manera intuitiva, si dos funciones tienden a cero (o a infinito), el valor del límite de su cociente dependerá de cuál de ellas se aproxima más rápido. La derivada permite capturar esta idea de “velocidad de aproximación”.

Por ejemplo, si $f(x)$ tiende a cero más rápidamente que $g(x)$, es razonable esperar que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$$

y esta relación puede hacerse evidente al comparar sus derivadas.

En consecuencia, la Regla de L'Hôpital no es simplemente un procedimiento algebraico, sino una herramienta que refleja el comportamiento local de las funciones a través de sus tasas de cambio.

3.3. Condiciones de Aplicabilidad

Para aplicar correctamente la Regla de L'Hôpital, es indispensable verificar que se cumplan ciertas condiciones. Esto es importante ya que el uso inadecuado de esta herramienta puede conducir a conclusiones incorrectas.

A continuación, se presentan las condiciones necesarias para su aplicación:

1. Existencia de una forma indeterminada:

La Regla de L'Hôpital solo puede aplicarse cuando el límite presenta una forma indeterminada del tipo:

$$\frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Si al sustituir directamente no se obtiene una forma indeterminada, la regla no puede utilizarse.

2. Derivabilidad de las funciones:

Las funciones f y g deben ser derivables en un intervalo abierto que contiene al punto de interés (excepto, posiblemente, en dicho punto).

3. No anulación de la derivada del denominador:

Se debe cumplir que:

$$g'(x) \neq 0$$

en un entorno del punto donde se evalúa el límite, para evitar divisiones no definidas.

4. Existencia del nuevo límite:

El límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

debe existir o tender a infinito. Si este límite no existe, la Regla de L'Hôpital no permite concluir el valor del límite original.

5. Posibilidad de aplicación reiterada:

En algunos casos, al aplicar la Regla de L'Hôpital una vez, se obtiene nuevamente una forma indeterminada. En tales situaciones, es posible aplicar la regla de manera sucesiva, siempre que se sigan cumpliendo las condiciones anteriores.

4. Demostración del Teorema

La demostración del teorema de L'Hôpital se basa en el **Teorema del Valor Medio de Cauchy**, el cual es una generalización del Teorema del Valor Medio clásico.

4.1. Teorema del Valor Medio de Cauchy

Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b) , con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

([1] Stewart, 2015)

4.2. Demostración de la Regla de L'Hôpital

4.2.1. Demostración para la forma $\frac{0}{0}$

Supongamos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Y que f y g cumplen las condiciones del teorema.

Sea $x \neq a$ cercano a a . Considerando el intervalo $[x, a]$ (o $[a, x]$ según el caso). Dado que f y g son continuas y derivables en los intervalos correspondientes, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio de Cauchy. Entonces, existe un punto c entre x y a tal que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} = 0$. Por tanto, la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ahora, cuando $x \rightarrow a$ el hecho de que el punto c se encuentre entre x y a implica que, al acercarse x a a , el punto c también se aproxima a dicho valor, por consiguiente $c \rightarrow a$. Si existe el límite,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

Entonces se concluye que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.2.2. Demostración para la forma $\frac{\infty}{\infty}$

En este caso, $f(x) \rightarrow \infty$ y $g(x) \rightarrow \infty$. Por tanto, puede demostrarse de manera análoga, mediante transformaciones adecuadas que permiten reducir el problema a una forma similar al caso anterior.

En consecuencia, el teorema de L'Hôpital queda demostrado bajo las condiciones establecidas.

5. Aplicación de la Regla de L'Hôpital

En esta sección se estudia la aplicación de la Regla de L'Hôpital para resolver límites que presentan diferentes tipos de formas indeterminadas.

Como se mencionó anteriormente, la Regla de L'Hôpital se aplica directamente únicamente a expresiones de tipo:

$$\frac{0}{0} \quad \text{y} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Sin embargo, muchas otras formas indeterminadas pueden transformarse algebraicamente en una de estas dos, lo que permite utilizar esta herramienta de manera efectiva.

Para cada tipo de forma indeterminada, se presentará:

- una descripción del caso,
- la estrategia de resolución,
- ejemplos ilustrativos desarrollados paso a paso.

El objetivo es que el estudiante no solo aprenda a aplicar la Regla de L'Hôpital, sino que también comprenda cuándo y cómo utilizarla correctamente.

5.1. Forma $0/0$

Se dice que un límite presenta una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ cuando:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

En este caso, la sustitución directa no permite determinar el valor del límite, por lo que es necesario aplicar técnicas adicionales. [1, 2]

5.1.1. Procedimiento

Cuando se obtiene una forma $\frac{0}{0}$, es posible aplicar la Regla de L'Hôpital, siempre que se cumplan sus condiciones de aplicabilidad. El procedimiento consiste en:

1. Verificar que, al sustituir directamente en el límite, se obtiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.
2. Comprobar que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un entorno abierto del punto de interés (excepto, posiblemente, en dicho punto).
3. Verificar que la derivada del denominador no se anula en dicho entorno, es decir, que $g'(x) \neq 0$.
4. Derivar el numerador y el denominador por separado y evaluar el nuevo límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5. Si el resultado sigue siendo una forma indeterminada, se puede aplicar nuevamente la Regla de L'Hôpital, siempre que se continúen cumpliendo las condiciones anteriores.

5.1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Solución: Al sustituir directamente $x = 0$ obtenemos:

$$\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Lo cual corresponde a una forma indeterminada.

Antes de aplicar la Regla de L'Hôpital, verificamos que se cumplen sus condiciones de aplicabilidad:

- **Forma indeterminada:** Se obtiene una expresión del tipo $\frac{0}{0}$.
- **Derivabilidad:** Las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = x$ son derivables entorno a $x = 0$.
- **No anulación del denominador derivado:** Se tiene que $g'(x) = 1 \neq 0$ para el valor de $x = 0$.
- **Continuidad en el punto:** Conocemos que ambas funciones son continuas para $x = 0$ por ser derivables en ese punto.

De esa manera, se puede decir que es válido aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Ejemplo 2.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Solución: Sustituyendo $x = 0$ obtenemos:

$$\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Lo que corresponde a una forma indeterminada.

El estudiante puede verificar que se cumplen las condiciones de aplicabilidad de la Regla de L'Hôpital, en particular la derivabilidad de las funciones involucradas y que la derivada del denominador no se anula en un entorno del punto considerado.

Aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - 1)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

5.2. Forma ∞/∞

Se dice que un límite presenta una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ cuando:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

Esto también puede ocurrir cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$

En estos casos, la sustitución directa no permite determinar el valor del límite, ya que el cociente entre dos cantidades infinitas puede tomar distintos valores dependiendo de la rapidez con la que crecen las funciones involucradas [1, 2]

5.2.1. Procedimiento

Cuando se obtiene una forma $\frac{\infty}{\infty}$, se puede aplicar la Regla de L'Hôpital, siempre que se cumplan sus condiciones de aplicabilidad. El procedimiento es análogo al caso $\frac{0}{0}$:

1. Verificar que el límite presenta una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
2. Comprobar que las funciones involucradas son derivables en un entorno del punto de interés.
3. Verificar que la derivada del denominador no se anula, es decir, que $g'(x) \neq 0$.
4. Aplicar la Regla de L'Hôpital derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5. Si el resultado sigue siendo indeterminado, repetir el proceso, siempre que se continúen cumpliendo las condiciones.

5.2.2. Ejemplos

Ejemplo 1.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$$

Solución: Al evaluar el comportamiento de las funciones:

$$x \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad e^x \rightarrow \infty$$

Se obtiene una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Antes de aplicar la Regla de L'Hôpital, verificamos sus condiciones de aplicabilidad:

- **Forma indeterminada:** Se obtiene una expresión del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
- **Derivabilidad:** Las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$ son derivables en $(0, \infty)$.
- **No anulación del denominador derivado:** Se tiene que $g'(x) = e^x \neq 0$ para todo x .
- **Continuidad en el punto:** Conocemos que ambas funciones son continuas infinito por ser derivables en $(0, \infty)$.

Por lo tanto, es válido aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}$$

Observamos que cuando x tiende a infinito, también e^x lo hace, por lo que $\frac{1}{e^x} \rightarrow 0$. Esto es así ya que la función exponencial e^x crece sin límite, por lo que su inverso $\frac{1}{e^x}$ se hace cada vez más pequeño y se aproxima a cero.

Finalmente:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0}$$

Ejemplo 2.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Solución: Al analizar el comportamiento de las funciones:

$$x^2 \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad e^x \rightarrow \infty$$

Se obtiene una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Además, el estudiante puede verificar que se cumplen las condiciones de aplicabilidad de la Regla de L'Hôpital para su posterior uso.

Aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Como aún se obtiene una forma indeterminada y la nueva expresión sigue cumpliendo las condiciones de aplicabilidad, aplicamos nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0}$$

5.3. Forma $\infty - \infty$

Se presenta una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$ cuando:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \text{Considerando la diferencia: } f(x) - g(x)$$

Aunque ambas funciones tienden a infinito, su diferencia puede converger a un valor finito, infinito o no existir [1, 2]

5.3.1. Procedimiento

La Regla de L'Hôpital no puede aplicarse directamente a una expresión del tipo $\infty - \infty$, ya que esta no se encuentra en forma de cociente. Por lo tanto, es necesario realizar una transformación algebraica previa. El procedimiento consiste en:

1. Identificar que la expresión presenta una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$.

2. Reescribir la expresión utilizando técnicas algebraicas como:

- factorización,
- racionalización,
- uso de denominador común,
- propiedades de logaritmos.

3. Transformar la expresión en una fracción equivalente que presente una forma del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Verificar las condiciones de aplicabilidad de la Regla de L'Hôpital para la nueva expresión.

5. Aplicar la regla y evaluar el límite resultante.

5.3.2. Ejemplos

Ejemplo 1.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x+1) - \ln x)$$

Solución: Se observa la forma $\infty - \infty$. Reescribimos el logaritmo recordando la propiedad de los logaritmos:

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Quedándonos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Recordemos también que como la función logaritmo natural es continua en su dominio, es válido reescribir el límite de la función como la función evaluada en el límite.

Esto se da ya que, en general, si f es continua en un punto L , entonces se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

siempre que exista el límite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ y pertenezca al dominio de f .

En este caso, como $\frac{x+1}{x} \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\ln(x)$ es continua en $x = 1$, se puede intercambiar el límite con la función logaritmo, por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}\right)$$

Esta es una forma $\frac{\infty}{\infty}$. El estudiante podrá comprobar las condiciones de aplicabilidad para el uso de la Regla de L'Hôpital, por lo que al usarla nos queda:

$$\ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1}\right) = \ln(1) = 0$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x+1) - \ln x) = 0}$$

Ejemplo 2.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

Solución: Se observa la forma $\infty - \infty$. Para resolverla, racionalizamos multiplicando por el conjugado:

$$\left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + x}}$$

Obtenemos:

$$\frac{(x^2 + 3x) - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + x}}$$

Ahora tenemos una forma $\frac{\infty}{\infty}$ y ya que las condiciones para la aplicabilidad de la Regla de L'Hôpital pueden ser comprobadas por el estudiante, la usamos, quedándonos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}$$

Analizando el comportamiento cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \rightarrow 1, \quad \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \rightarrow 1$$

Obteniendo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}\right) = 1}$$

5.4. Forma $0 \cdot \infty$

Se presenta cuando:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

y se analiza el producto $f(x) \cdot g(x)$, generando la indeterminación. [1, 2]

5.4.1. Procedimiento

La forma indeterminada $0 \cdot \infty$ no puede resolverse directamente mediante la Regla de L'Hôpital, ya que esta se aplica únicamente a cocientes. Por lo tanto, es necesario transformar el producto en una fracción equivalente.

El procedimiento consiste en:

1. Verificar que la expresión presenta una forma del tipo $0 \cdot \infty$.
2. Reescribir el producto como un cociente:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

3. Obtener una nueva expresión que presente una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
4. Verificar que se cumplen las condiciones de aplicabilidad de la Regla de L'Hôpital para la nueva expresión.
5. Aplicar la regla y evaluar el límite correspondiente.

5.4.2. Ejemplos

Ejemplo 1.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

Solución:

Se observa que:

$$x \rightarrow 0 \quad y \quad \ln x \rightarrow -\infty$$

Por lo cual tenemos una indeterminación $0 \cdot -\infty$.

Reescribimos la expresión para poder aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

Ahora tenemos una forma $\frac{-\infty}{\infty}$. Así que aplicamos la Regla de L'Hôpital comprobando previamente las condiciones de aplicabilidad por parte del estudiante:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0}$$

Ejemplo 2.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$$

Solución:

Se observa que:

$$x \rightarrow \infty \quad y \quad e^{-x} \rightarrow 0$$

Por lo cual tenemos una indeterminación $0 \cdot -\infty$.

Reescribimos la expresión para poder aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$$

Ahora tenemos una forma $\frac{\infty}{\infty}$. El estudiante puede comprobar las condiciones de uso de la Regla de L'Hôpital, por lo que la aplicamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0}$$

5.5. Formas indeterminadas exponenciales $0^0, 1^\infty, \infty^0$

Estas formas aparecen cuando una función tiene la forma:

$$[f(x)]^{[g(x)]}$$

y los límites generan expresiones como:

$$0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Estas expresiones no tienen un valor definido sin un análisis adicional. Para estos casos se utilizan el logaritmo natural.

([1] Stewart, 2015)

5.5.1. Procedimiento

Las formas indeterminadas exponenciales $0^0, 1^\infty$ y ∞^0 no pueden analizarse directamente, ya que involucran expresiones de tipo potencia. Por lo tanto, es necesario transformarlas en una forma que permita aplicar herramientas de cálculo diferencial.

El procedimiento consiste en:

1. Verificar que la expresión presenta una forma indeterminada del tipo $0^0, 1^\infty$ o ∞^0 .
2. Definir una nueva variable:

$$y = f(x)^{g(x)}$$

3. Aplicar logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln y = g(x) \ln(f(x))$$

4. Analizar el límite de la nueva expresión:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))$$

5. Identificar la forma indeterminada resultante (usualmente $0 \cdot \infty$ o $\infty - \infty$).
6. Transformar dicha expresión en un cociente para obtener una forma del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
7. Verificar que se cumplen las condiciones de aplicabilidad de la Regla de L'Hôpital.
8. Aplicar la regla y calcular el límite correspondiente.
9. Finalmente, recuperar la variable original:

$$y = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))}$$

5.5.2. Ejemplos

Ejemplo 1.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

Solución: Se observa que:

$$x \rightarrow 0$$

Esta es una forma indeterminada 0^0 , de manera que usamos L'Hôpital.

Sea

$$y = x^x$$

Tomamos el logaritmo

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

Ahora se analiza el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$$

Recordemos que este es un límite conocido, visto en el ejemplo de la sección anterior. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$$

Finalmente:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln y = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = e^0 = 1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1}$$

Ejemplo 2.

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Solución: Sea

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Notamos que:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1 \quad y \quad x \rightarrow \infty$$

Esta es una forma indeterminada 1^∞ .

Tomamos el logaritmo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Reescribimos para usar L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Esto ya es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, por consiguiente aplicamos L'Hôpital, con previa comprobación de las condiciones de uso de esta por parte del estudiante:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + 1}$$

Notamos que aún tenemos una indeterminación, pero ahora de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y que el estudiante puede comprobar las condiciones para aplicar de nuevo la Regla en este caso. Así que aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

Finalmente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = e^1 = e$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

A través de diversos ejemplos, se evidenció cómo la Regla de L'Hôpital permite resolver límites que inicialmente presentan formas indeterminadas. No obstante, también se observó que su uso no es universal, lo que hace necesario reconocer cuándo es apropiado aplicarla y cuándo es preferible recurrir a otros métodos.

El análisis detallado de las distintas formas indeterminadas permitió además comprender que cada una requiere un tratamiento particular. En muchos casos, es necesario transformar la expresión original antes de aplicar herramientas como la Regla de L'Hôpital. Esta diversidad de enfoques resalta la importancia de desarrollar criterio matemático en la resolución de límites.

6. Mal Uso de la Regla de L'Hôpital

Aunque la Regla de L'Hôpital es una herramienta poderosa para el cálculo de límites, su uso incorrecto es frecuente entre los estudiantes. En muchos casos, se aplica sin verificar las condiciones necesarias o sin identificar correctamente la forma del límite.

En esta sección se presentan algunos de los errores más comunes, con el objetivo de prevenir su uso inadecuado y fomentar una comprensión más rigurosa del procedimiento.

Por eso también es importante entender que la Regla de L'Hôpital debe entenderse como una herramienta complementaria, no como un procedimiento automático y definitivo para resolver cualquier límite.

6.1. Aplicación sin forma indeterminada

La Regla de L'Hôpital solo puede aplicarse cuando el límite presenta una forma indeterminada del tipo:

$$\frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Sin embargo, es común que se intente aplicar en casos donde el límite ya está determinado.

Ejemplo incorrecto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$$

Parece que fuera una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, sin embargo si simplificamos es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Aplicar Regla de L'Hôpital aquí es innecesario por lo que siempre se debe intentar simplificar la expresión y verificar que herramienta es más conveniente usar.

6.2. Errores en la derivación

Otro error frecuente es aplicar incorrectamente las reglas de derivación al usar L'Hôpital. **Ejemplo incorrecto:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Aplicando Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{0}$$

Se derivó el numerador, pero no correctamente el denominador. Al aplicar Regla de L'Hôpital, se debe derivar tanto el numerador como el denominador de forma independiente y correcta..

6.3. Uso reiterado sin convergencia

En algunos casos, se aplica la Regla de L'Hôpital repetidamente sin verificar si el límite realmente converge.

Ejemplo incorrecto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x}$$

Aplicar L'Hôpital no simplifica el problema de manera útil, ya que la función sigue oscilando.

Para este caso es innecesario aplicar Regla de L'Hôpital cuando existen métodos más simples. por consiguiente podemos decir que no siempre L'Hôpital es la mejor estrategia.

6.4. Ignorar condiciones del teorema

La Regla de L'Hôpital requiere que:

- las funciones sean derivables,
- El denominador no tenga derivada cero en el intervalo,
- Exista el límite de las derivadas.

El error típico está en aplicar L'Hôpital sin verificar continuidad o derivabilidad, por lo que el resultado puede ser incorrecto o el procedimiento inválido.

Finalmente podemos concluir que el estudio de los errores más comunes en la aplicación de la Regla de L'Hôpital pone en evidencia que su uso indiscriminado puede conducir a conclusiones incorrectas. Por ello, es fundamental verificar siempre las condiciones del teorema y considerar métodos alternativos. Este enfoque crítico fortalece la comprensión del concepto de límite y evita el uso mecánico de la regla.

7. Integrales Impropias

En el cálculo integral, existen situaciones en las que se desea calcular el valor de una integral en contextos donde las condiciones habituales de integrabilidad no se cumplen. Estas situaciones dan lugar a las llamadas integrales impropias.

Una integral se considera impropia cuando ocurre alguna de las siguientes condiciones:

- El intervalo de integración es infinito.
- La función presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración.

En estos casos, la integral definida no puede evaluarse directamente mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, por consiguiente se recurre al uso de los límites.

7.1. Definición

Una integral impropia se define como el límite de una integral definida cuando uno de los extremos del intervalo tiende a infinito o cuando la función presenta una discontinuidad.

Por ejemplo, una integral impropia en un intervalo infinito se define como:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

De manera similar, si el intervalo es infinito hacia la izquierda:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

([1] Stewart, 2015; [2] Larson, 2014)

7.1.1. Convergencia y Divergencia

Una integral impropia puede:

- Converger, si el límite existe y es finito.
- Diverger, si el límite no existe o es infinito.

Esta clasificación es fundamental, ya que determina si la integral tiene un valor bien definido o no. Además es importante aclarar que la convergencia es global, pero basta una divergencia parcial para que toda diverja

7.1.2. Interpretación

Las integrales impropias permiten extender el concepto de área bajo la curva a situaciones más generales, como regiones infinitas o funciones con comportamientos no acotados.

Por ejemplo, es posible que una región tenga área finita incluso si se extiende indefinidamente, lo cual resulta contraintuitivo y será clave en secciones posteriores.

7.2. Integrales Impropias de Primera Especie

Las integrales impropias de primera especie son aquellas en las que el intervalo de integración es infinito.

Estas aparecen cuando se desea calcular el área bajo una curva en regiones que se extienden indefinidamente.

Por ejemplo, en

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

tenemos que en este caso, la región de integración se extiende indefinidamente hacia el infinito, lo que impide evaluar la integral como una integral definida usual y requiere el uso de límites.

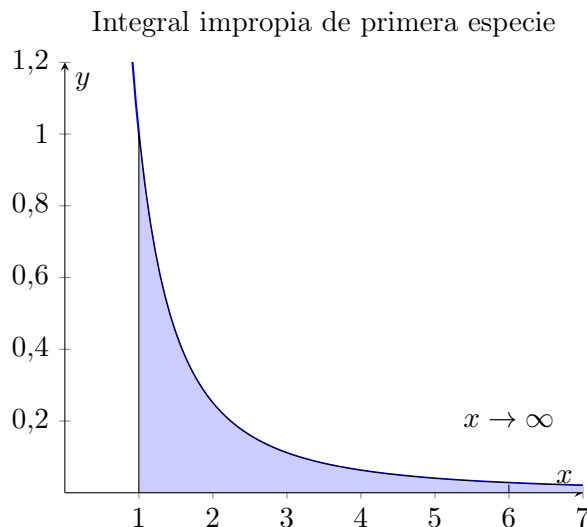


Figura 1: Región infinita en el eje x

7.2.1. Definición

Una integral impropia de primera especie se presenta cuando al menos uno de los límites de integración es infinito. En estos casos, la integral se define como un límite.

Por ejemplo, si el intervalo es infinito hacia la derecha:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

Si el intervalo es infinito hacia la izquierda:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

Y si el intervalo es infinito en ambos extremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

donde c es un número real cualquiera y cada una de las integrales se evalúa como un límite.

([1] Stewart, 2015; [2] Larson, 2014)

7.2.2. Ejemplos

Ejemplo 1 (integral convergente)

Calcular:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Solución:

Reescribimos la integral en función de un límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

Calculamos la integral:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \Big|_1^t \right]$$

Evaluamos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1}$$

lo que significa que la integral converge y lo hace a 1.

Ejemplo 2 (integral Divergente)

Calcular:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

Solución:

Reescribimos la integral en función de un límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^t$$

Evaluamos en el límite de integración y calculamos el límite:

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln(t) - \ln(1) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \Rightarrow \text{Diverge}}$$

Es importante notar que no todas las integrales con intervalo infinito divergen. El comportamiento depende de qué tan rápido decrece la función.

7.3. Integrales Impropias de Segunda Especie

Las integrales impropias de segunda especie son aquellas en las que la función presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración.

Esto ocurre cuando la función no está definida en algún punto del intervalo o tiende a infinito en dicho punto.

Por ejemplo, en

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$$

tenemos que en este caso, la función presenta una discontinuidad infinita en el extremo derecho del intervalo (ya que la función no está definida para $x = 1$), lo que impide evaluar la integral directamente y requiere el uso de límites. Gráficamente:

Integral impropia de segunda especie (discontinuidad en $x = 1$)

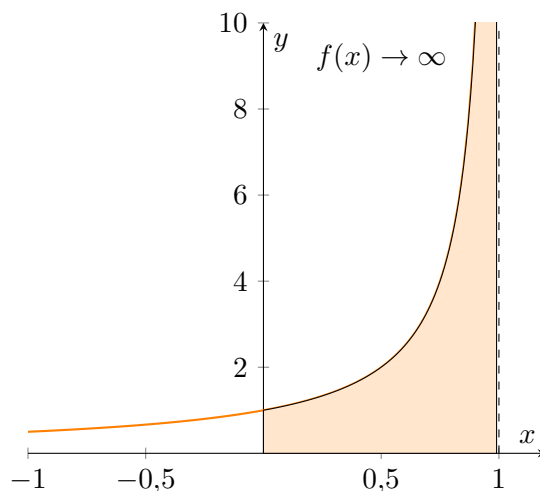


Figura 2: Discontinuidad infinita en el extremo superior del intervalo

7.3.1. Definición

Una integral impropia de segunda especie se presenta cuando existe un valor c en el intervalo $[a, b]$ tal que la función $f(x)$ no es continua en c , debido a que:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \rightarrow -\infty$$

En estos casos, la integral se define como un límite.

Si la discontinuidad ocurre en el extremo inferior:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Si ocurre en el extremo superior:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Si la discontinuidad está en un punto interior $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

donde cada una de estas integrales se evalúa como un límite.

([1] Stewart, 2015; [2] Larson, 2014)

7.3.2. Ejemplos

Ejemplo 1 (Discontinuidad en un Extremo)

Calcular:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Solución:

La función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tiende a infinito cuando $x \rightarrow 0^+$, por consiguiente la integral es impropia.

Reescribimos la integral en función de un límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Resolvemos la integral y evaluamos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_t^1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{t} \right) = 2 - 0 = 2$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2}$$

lo que significa que la integral converge y lo hace a 2.

Ejemplo 2 (discontinuidad en el interior)

Calcular:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

Solución:

La función no está definida en $x = 0$, por lo que se separa y se escriben en función de límites:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx$$

Evaluando las integrales por separado nos damos cuenta que nos queda la siguiente situación:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \ln |t| + \lim_{t \rightarrow 0^+} -\ln |t| = -\infty + \infty = \infty - \infty$$

Esta situación puede resultar confusa, ya que se obtiene una expresión del tipo $\infty - \infty$, que es una forma indeterminada. Sin embargo, es importante notar que esta indeterminación no proviene de un único límite, sino de la suma de dos límites independientes.

En el estudio de integrales impropias con discontinuidades en un punto interior, la integral original se define como la suma de dos integrales impropias separadas. Para que la integral total converja, es necesario que ambas integrales converjan de manera independiente.

En este caso:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x} dx = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \infty$$

Dado que una integral impropia definida como suma de dos integrales converge si y solo si ambas convergen. Si al menos una diverge (en este caso ambas lo hacen), entonces la integral total diverge.

Por lo tanto, no es válido intentar “compensar” una divergencia con otra, como si fuera una de las formas indeterminadas presentadas en este mismo documento, ya que cada una debe analizarse de forma independiente.

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \text{Diverge}$

([1] Stewart, 2015; [2] Larson, 2014)

7.4. Integrales Impropias Mixtas

Las integrales impropias mixtas son aquellas que presentan más de una causa de impropiedad al mismo tiempo. Es decir, combinan:

- Intervalos infinitos (como en las integrales de primera especie), y
- Discontinuidades en el intervalo de integración (como en las de segunda especie).

Por ejemplo, en

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

tenemos que la integral presenta simultáneamente un intervalo infinito y una discontinuidad infinita (ya que la función no está definida para $x = 1$ y la función tiende a infinito en el límite lateral derecho de la función cuando x tiende a 1), por lo que su evaluación requiere el uso de límites en ambos límites de integración.

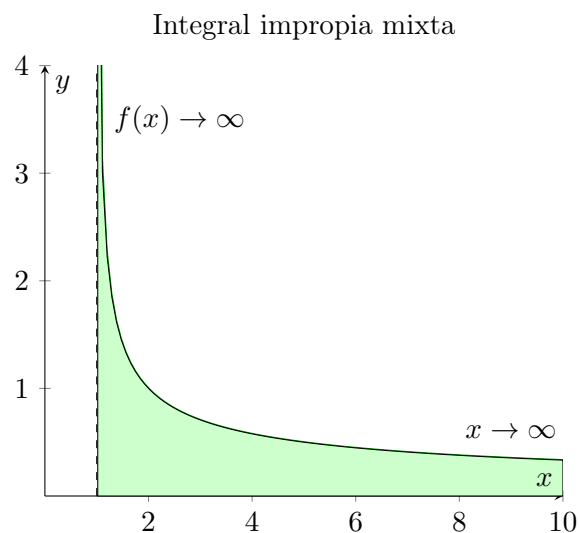


Figura 3: Discontinuidad infinita y dominio infinito

7.4.1. Definición

De manera general, una integral impropia mixta puede tomar la forma:

Intervalo infinito con una discontinuidad:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{donde } f(x) \text{ es discontinua en algún punto del intervalo}$$

Discontinuidad en un intervalo infinito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{con discontinuidades en uno o más puntos dentro del intervalo}$$

La integral impropia mixta converge únicamente si todas las integrales impropias asociadas convergen de manera independiente. En caso contrario, la integral diverge.

Esto implica que:

1. Se debe separar la integral en partes según:
 - los puntos de discontinuidad
 - los intervalos infinitos
2. Cada parte se expresa como un límite independiente
3. La integral total:
 - converge si todos los límites son finitos
 - diverge si al menos uno diverge

Este criterio es una extensión directa de la definición de integral impropia como límite.

7.4.2. Ejemplos

Ejemplo 1 (infinito + discontinuidad en el intervalo)

Calcular:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} dx$$

Solución:

La función presenta una discontinuidad en $x = 1$, por consiguiente la integral es impropia de segunda especie. Además, el intervalo es infinito, por lo que también es de primera especie. Por tanto, es una integral impropia mixta.

Se expresa como:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x(x-1)} dx$$

Sin embargo, debido a la discontinuidad en $x = 1$, se debe analizar:

$$\int_1^t \frac{1}{x(x-1)} dx = \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^t \frac{1}{x(x-1)} dx$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

Entonces, resolviendo la integral y evaluando:

$$\int_a^t \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\ln|x-1| - \ln|x| \right) \Big|_a^t = \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) - \ln\left(\frac{a-1}{a}\right)$$

Ahora analizamos los límites:

- Cuando $t \rightarrow \infty$: $\frac{t-1}{t} \rightarrow 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$
- Cuando $a \rightarrow 1^+$: $\frac{a-1}{a} \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(0) = -\infty$

Por tanto:

$$0 - (-\infty) = \infty$$

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} dx \Rightarrow \text{Diverge}}$$

Notamos que aunque la parte en el infinito parece converger, la discontinuidad en $x = 1$ hace que la integral diverja. Esto confirma que todas las condiciones deben cumplirse simultáneamente.

Ejemplo 2 (intervalo infinito bilateral + discontinuidad)

Calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Solución:

Esta integral presenta dos tipos de impropiedad:

- Intervalo infinito en ambos extremos
- Discontinuidad en $x = 0$

Se separa en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Cada una de las integrales se evalúa como:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_a^t x^{-2} dx \right) \right]$$

Resolviendo la integral y evaluando los límites de integración, nos queda:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^t \right] = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{a} \right) \right]$$

Ahora, cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{t} \rightarrow 0$$

Y cuando $a \rightarrow 0^+$:

$$\frac{1}{a} \rightarrow \infty$$

Quedando que:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{a} \right) \right] = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[0 + \frac{1}{a} \right] = \infty$$

De manera que esta parte diverge de la integral, y en consecuencia:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \text{Diverge}}$$

Las integrales impropias mixtas requieren un análisis más cuidadoso, ya que combinan múltiples fuentes de divergencia. El criterio clave es que la convergencia debe verificarse en cada componente por separado.

7.5. Relación con la Regla de L'Hôpital

Como ya fue mencionado la Regla de L'Hôpital es una herramienta utilizada para evaluar límites que presentan formas indeterminadas, como:

$$\frac{0}{0} \quad y \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Por otro lado, las integrales impropias se definen precisamente como límites.

Por esta razón, existe una relación directa entre ambos conceptos:

La Regla de L'Hôpital puede utilizarse dentro del análisis de integrales impropias cuando, al evaluarlas, aparecen límites con formas indeterminadas.

De manera específica, cuando se evalúa una integral impropia, se transforma en uno o más límites de la forma:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

o bien:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx$$

Si al resolver algún límite aparece una forma indeterminada, es posible aplicar la Regla de L'Hôpital.

7.5.1. Ejemplo

Evaluar:

$$\int_1^\infty \frac{x}{e^x} dx$$

Solución:

1. Expresar como límite:

$$\int_1^\infty \frac{x}{e^x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{x}{e^x} dx$$

2. Resolver la integral:

Usamos integración por partes:

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

Entonces:

$$\int \frac{x}{e^x} dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x} = -\frac{x+1}{e^x}$$

Evalutando la integral:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{x+1}{e^x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} = \left(-\frac{t+1}{e^t} + \frac{1+1}{e^1} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e} - \frac{t+1}{e^t} \right)$$

3. Evaluamos el límite:

El término clave es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{e^t}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ el límite tiende a $\frac{\infty}{\infty}$, lo que corresponde a una forma indeterminada y por tanto usamos L'Hôpital, quedandonos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt}(t+1)}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

4. Resultado:

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e} - \frac{t+1}{e^t} \right) = \frac{2}{e} - 0 = \frac{2}{e}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{x}{e^x} dx = \frac{2}{e}}$$

Lo que significa que la integral converge a $\frac{2}{e}$, siendo útil la Regla de L'Hôpital para llegar al resultado.

Las integrales impropias amplían el concepto de integral definida al considerar intervalos infinitos o funciones no acotadas. A través de su estudio, se evidenció que la convergencia depende del comportamiento límite de la función, lo cual establece una conexión directa con los conceptos previamente abordados, en particular con el análisis de límites y las formas indeterminadas.

8. Trompeta de Gabriel

8.1. Definición

La Trompeta de Gabriel (también conocida como cuerno de Gabriel) es un sólido de revolución que se obtiene al girar la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

alrededor del eje x , en el intervalo:

$$[1, \infty)$$

8.1.1. Descripción Geométrica

Al realizar esta rotación:

- La gráfica de $\frac{1}{x}$ se aproxima al eje x , pero nunca lo toca
- Al girar la curva, se genera una figura que:
 - Se extiende indefinidamente en la dirección del eje x
 - Se va haciendo cada vez más delgada

El resultado es un sólido que parece una trompeta infinita, de ahí su nombre. [1, 2]

Para comprender la construcción de la Trompeta de Gabriel, primero se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, \infty)$, junto con la región cuya rotación genera el sólido.

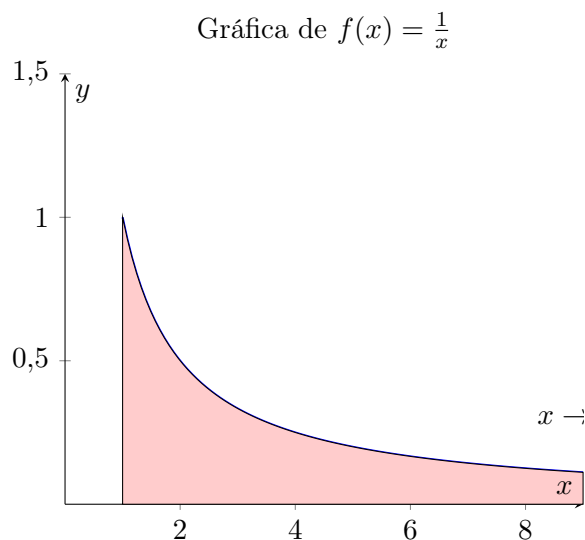


Figura 4: Región cuya rotación genera la Trompeta de Gabriel

Una vez observada la función generadora, se muestra el sólido que resulta al rotar dicha curva alrededor del eje x , lo cual permite comprender la estructura geométrica de la Trompeta de Gabriel.

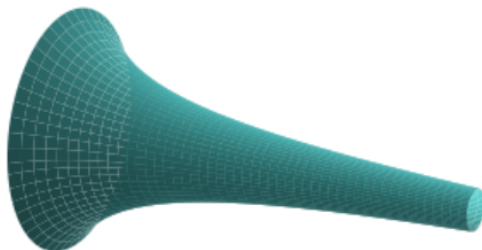


Figura 5: Representación de la Trompeta de Gabriel obtenida al rotar $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor del eje x

8.1.2. Importancia Matemática:

La Trompeta de Gabriel es un ejemplo clásico en cálculo porque presenta una situación aparentemente contradictoria:

“Es posible que un sólido tenga volumen finito pero área superficial infinita.”

Este fenómeno surge directamente del comportamiento de las integrales impropias, lo que la convierte en una aplicación fundamental de este tipo de integrales [1, 2].

8.2. Cálculo del Volumen

Para calcular el volumen de la Trompeta de Gabriel, se utiliza el método de discos, ya que el sólido se genera al girar la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

alrededor del eje x , en el intervalo $[1, \infty)$.

El volumen viene dado por:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

Esta es una integral impropia de primera especie, debido a que el intervalo es infinito.

Primero lo expresamos como Límite:

$$V = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

Sabemos que:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$$

Entonces:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = -\frac{1}{t} + 1 = 1 - \frac{1}{t}$$

Evaluamos el límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

Por lo tanto:

$$V = \pi \cdot 1 = \pi$$

$$\boxed{V = \pi}$$

Esto nos muestra que a pesar de que la Trompeta de Gabriel se extiende infinitamente en el eje x , su volumen es finito. Esto ocurre porque la función $\frac{1}{x^2}$ decrece lo suficientemente rápido como para que la integral converja [1].

8.3. Cálculo del Área

Para calcular el área superficial de la Trompeta de Gabriel, se utiliza la fórmula del área de una superficie de revolución alrededor del eje x :

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

donde:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Primero derivamos la función $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Entonces:

$$(f'(x))^2 = \frac{1}{x^4}$$

Ahora sustituímos en la formula de área:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

Esta es una integral impropia de primera especie, ya que el intervalo es infinito.

A diferencia del volumen, esta integral no es fácil de resolver de forma exacta (Aunque se puede), así que la analizaremos mediante el método de comparación.

Recordamos que el criterio de comparación para integrales impropias establece que:

Sea $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y positivas en un intervalo $[a, \infty)$, tales que:

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Para todo $x \geq a$.

Entonces, si:

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} g(x) dx & \text{ converge} \\ \int_a^{\infty} f(x) dx & \text{ también converge} \end{aligned}$$

De la misma manera, si:

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad \text{diverge}$$

$$\int_a^\infty g(x) dx \quad \text{también diverge}$$

Básicamente, el criterio de la comparación nos dice que:

- si una función es más pequeña que otra que converge, también debe converger, y
- si una función es más grande que otra que diverge, también debe divergir.

Entonces, observamos que la raíz siempre va a ser positiva y mayor a 1, ya que nuestro intervalo de integración va desde 1 hasta ∞ , de manera que si:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$$

Entonces:

$$\frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > \frac{1}{x}$$

Para usar el criterio de la comparación, resolvemos la integral y evaluamos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln |x| \right) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln |t| - \ln |1| = \infty - 0 = \infty$$

Esta es una integral que Diverge, y dado que nuestra función $\frac{1}{x}$ es mayor, se concluye que:

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

También diverge por el criterio de la comparación.

Por lo que, finalmente:

$A = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{El Área Diverge}$

Esto nos muestra que cuando Trompeta de Gabriel se extiende infinitamente en el eje x , su área es infinita. Esto ocurre porque la función $\frac{1}{x}$ no decrece lo suficientemente rápido como para que la integral converja, por lo que diverge [1].

8.4. Interpretación

La Trompeta de Gabriel constituye uno de los ejemplos más representativos en cálculo para ilustrar cómo la intuición geométrica puede fallar frente al análisis matemático riguroso y el estudio del infinito.

Como ya vimos, a partir de los cálculos realizados, se obtiene que:

- El volumen del sólido es finito:

$$V = \pi$$

- El área superficial es infinita:

$$A = \infty$$

Este resultado muestra que el comportamiento de una función en el infinito puede afectar de manera distinta a diferentes magnitudes asociadas a un mismo objeto. De manera que la función $\frac{1}{x^2}$ (relacionada con el volumen) decrece lo suficientemente rápido como para que la integral converja Mientras que $\frac{1}{x}$ (relacionada con el área) no decrece lo suficientemente rápido, provocando la divergencia de la misma [1,2].

Esto genera una aparente paradoja. Desde un punto de vista intuitivo, podría pensarse que, Si el volumen es finito, entonces el área también debería serlo. Sin embargo, la Trompeta de Gabriel demuestra que esto no es necesariamente cierto.

Este fenómeno se conoce comúnmente como una paradoja matemática, aunque en realidad no es una contradicción, sino una consecuencia del comportamiento de las integrales impropias.

8.4.1. Interpretación Física:

Frecuentemente se plantea la idea de que se puede “llenar” la trompeta con una cantidad finita de pintura (volumen) Pero no se puede “pintar” su superficie (área infinita), pero es importante aclarar que esta interpretación es solo ilustrativa, ya que en la práctica la pintura tiene grosor y los modelos físicos no son ideales.

La trompeta de Gabriel constituye un ejemplo notable en el cálculo, al mostrar que un sólido puede tener volumen finito y área superficial infinita. Este resultado, aunque contraintuitivo, es coherente con el análisis de integrales impropias y refuerza la importancia de comprender el comportamiento límite de las funciones.

9. Ejercicios Propuestos

Los ejercicios propuestos buscan consolidar los conceptos desarrollados a lo largo del documento, promoviendo tanto la aplicación técnica como la comprensión conceptual. Se recomienda abordar los problemas de manera progresiva, prestando especial atención al análisis previo de cada situación antes de seleccionar el método de solución. Los siguientes ejercicios están inspirados en problemas típicos de [1,2].

Resuelva los siguientes límites propuestos del 1 al 10 identificando previamente el tipo de indeterminación:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$$

Del punto 11 al 18 resuelva los límites usando la Regla de L'Hôpital, si es necesario:

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Resuelva los límites del punto 19 al 22 de dos formas: (a) usando la Regla de L'Hôpital y (b) usando otro método (factorización, identidades, etc.)

19. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

Determine si es correcto o no aplicar la Regla de L'Hôpital en los límites propuestos del 23 al 27. Justifique.

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x)$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^{-x})$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 1$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$$

De los ejercicios del 28 al 39 determine para cada caso que tipo de integral impropia es, si convergen o divergen y en caso de convergencia, calcule su valor.

28. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$
29. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$
30. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
31. $\int_0^1 \ln x dx$
32. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$
33. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$
34. $\int_1^{\infty} \frac{x}{e^x} dx$
35. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$
36. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
37. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$
38. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$
39. $\int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx$

Para los ejercicios 40 y 41 tenga en cuenta lo visto en la sección 8 acerca del ejemplo particular de la Trompeta de Gabriel.

40. Demostrar que el volumen del sólido generado por $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, \infty)$ es finito.
41. Demostrar que el área superficial de la Trompeta de Gabriel es infinita, sin utilizar el criterio de comparación.

10. Conclusiones

A lo largo de este documento se ha evidenciado que el estudio de las formas indeterminadas, la Regla de L'Hôpital y las integrales impropias no debe limitarse a la aplicación mecánica de procedimientos, sino que requiere una comprensión profunda de los conceptos involucrados.

En relación con el contexto planteado, se abordaron las principales dificultades que enfrentan los estudiantes, proporcionando herramientas claras para identificar, analizar y resolver problemas asociados a límites e integrales. Asimismo, se destacó la importancia de verificar las condiciones de aplicación de la Regla de L'Hôpital, evitando errores frecuentes.

Se cumplió también el propósito de presentar la Regla de L'Hôpital como una herramienta dentro de un conjunto más amplio de métodos, fomentando el pensamiento crítico y la toma de decisiones en la resolución de problemas.

Además se logró comprender y clasificar las formas indeterminadas, aplicar correctamente la Regla de L'Hôpital, analizar la convergencia de integrales impropias, relacionar distintos conceptos del cálculo e interpretar resultados desde un punto de vista matemático y conceptual.

Finalmente, el estudio de la Trompeta de Gabriel permitió evidenciar cómo el análisis riguroso puede conducir a resultados que contradicen la intuición, reforzando la importancia del cálculo como herramienta fundamental para la comprensión del comportamiento de las funciones.

En conjunto, los temas abordados permiten construir una visión integral del manejo de límites e integrales en situaciones no triviales, destacando la importancia del razonamiento matemático por encima de la aplicación mecánica de técnicas.

Referencias

- [1] J. Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*. Boston: Cengage Learning, 8 ed., 2015.
- [2] R. Larson and B. H. Edwards, *Calculus*. Boston: Cengage Learning, 10 ed., 2014.